**XXVII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - 24/09/2016**

---

**PROVA DO NÍVEL III**

**PROBLEMA 1**

Calcule a soma de todos os divisores do número $K = 19^{88} - 1$ que sejam da forma $2^x \times 3^y$, com $x, y$ inteiros positivos.

**Solução**

A resposta é $744$.

A ideia é encontrar as mais altas potência de $2$ e de $3$ que dividem $K$. Para isso, vamos usar o Teorema do Binômio de dois modos distintos:

- Inicialmente, observamos que

$$19^{88} = (20-1)^{88} = \binom{88}{0} - \binom{88}{1}20 + \binom{88}{2}20^2 - \binom{88}{3}20^3 + \cdots + \binom{88}{88}20^{88} =$$

$$= 1 - 88 \times 20 + (\text{termos divisíveis } por\ 2^6). \qquad (*)$$

  Para concluir $(*)$ usamos o fato de que $\binom{88}{2} = \frac{1}{2} \times 88 \times 87 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 29$.

- Depois, usamos o fato de que

$$19^{88} = (18+1)^{88} = \binom{88}{0} - \binom{88}{1}18 + \binom{88}{2}18^2 - \binom{88}{3}18^3 + \cdots + \binom{88}{88}18^{88} =$$

$$= 1 - 88 \times 18 + (\text{termos divisíveis } por\ 3^4).$$

Como $88 \times 20 = 2^5 \times 5 \times 11$ e $88 \times 8 = 3^2 \times 2^4 \times 11$, segue que $K = 19^{88} - 1$ é divisível por $2^5$, mas não por $2^6$, e que é divisível por $3^2$ e não por $3^3$.

Assim, a soma que queremos é

$$S = \sum_{\substack{\{(x,y);\ x>0,\ y>0\} \\ 2^y.3^y\ dividindo\ K}} 2^x \times 3^y = \sum_{\substack{x \in \{1,2,3,4,5\} \\ y \in \{1,2\}}} 2^x \times 3^y =$$

$$S = \sum_{x=1}^{5} 2^x \times \sum_{y=1}^{2} 3^y = (2+4+8+16+32) \times (3+9) = 62 \times 12 = 744.$$

**PROBLEMA 2**

Considere um tabuleiro eletrônico $4 \times 4$, onde inicialmente todas as casas possuem uma luz vermelha acesa. A cada minuto, pode-se apertar o centro de cada casa, para mudar a luz vermelha por uma luz verde nesta casa e nas casas adjacentes (Uma casa é adjacente a outra se possui um lado em comum). Qual é o número mínimo de minutos necessários para se obter o tabuleiro com somente as luzes verdes acesas?

**Solução**

A resposta é 4.
Podemos mudar **no máximo** 5 casas por minuto. Como existem 16 casas, levaremos **no mínimo** 4 minutos para alterar as cores de cada quadrado. Veja, na figura a seguir, quais casas temos que apertar o centro para se obter o tabuleiro com somente as luzes verdes acesas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **X** | | |
| | | | **X** |
| **X** | | | |
| | | **X** | |

**PROBLEMA 3**

Um triângulo $ABC$ é tal que as medidas dos seus lados são: $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Se

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4a^2b^2 + b^2c^2 + 4c^2a^2,$$

determine as possíveis medidas do ângulo do vértice $A$.

**Solução**

Observe que

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + c^4.$$

Logo, a igualdade dada pode ser reescrita como:

$$a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + c^4 = 4a^2b^2 + b^2c^2 + 4c^2a^2 \iff$$
$$\iff a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + b^2c^2 + c^4 - 2c^2a^2 = 0.$$

Somando $b^2c^2$ a ambos os lados da igualdade acima, obtemos:

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 2b^2c^2 + c^4 - 2c^2a^2 = b^2c^2 \iff (b^2 + c^2 - a^2)^2 = b^2c^2$$
$$\iff (b^2 + c^2 - a^2)^2 - b^2c^2 = 0 \iff$$
$$\iff (b^2 + c^2 - a^2 - bc) \cdot (b^2 + c^2 - a^2 + bc) = 0.$$

Logo, temos

$$b^2 + c^2 - bc = a^2 \qquad ou \qquad b^2 + c^2 + bc = a^2.$$

Mas, pela Lei do Cossenos, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

que combinado com os dois resultados acima implica em duas possibilidades:

- $bc(1 + 2\cos A) = 0 \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120°$, *pois* $0 \leq A \leq 180°$;
- $bc(1 - 2\cos A) = 0 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60°$, *pois* $0 \leq 180°$.

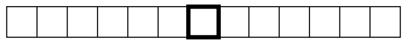
Portanto, as únicas possibilidades são: $A = 60°$ ou $A = 120°$.

**PROBLEMA 4**

Dizemos que uma sequência, $S$, de letras é um *quase palíndromo* se $S$ e o inverso de S diferem por exatamente dois lugares.
Por exemplo, a sequência **NATAL** é um **quase palíndromo** pois a sequência inversa **LATAN** difere da sequência original, **NATAL**, apenas pelas posições das letras **N** e **L**.
Encontre a quantidade de maneiras de ordenar as letras da sequência **NAATTNRARTRLA** para se obter um *quase palíndromo*.

**Solução**

A resposta é $2160$.
A sequência de letras dada é composta por $13$ letras e a posição central é a sétima, veja figura a seguir.



Observe que as letras $T$, $R$, $L$ foram usadas um número ímpar de vezes ($T$, $R$ três vezes e a letra $L$ uma só vez). Logo, para se ordenar as letras da sequência **NAATTNRARTRLA** de modo a obter um *quase palíndromo*, uma delas tem de ficar no centro (i.e. a posição $7$, contada da esquerda para a direita ou da direita para esquerda) e as outras duas tem de ficar em posições equilibradas.
Aqui podemos pensar em diferentes casos, considerando a letra que ocupa a posição central.
**Caso 1: A letra L na posição central.**

Neste caso, nos seis primeiros lugares você precisa arrumar as letras $N$, $A$, $A$, $T$, $R$.
Para escolher um lugar para a letra $N$ há $6$ possibilidades; para escolher os lugares para as duas letras $A$ há $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!}$ possibilidades; para escolher o lugar para a letra $T$ há $3$ possibilidades e para escolher um lugar para a letra $R$ há $2$ possibilidades, donde concluímos que há $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2!} \cdot 3 \cdot 2$ possibilidades de arrumar as letras $N$, $A$, $A$, $T$, $R$. Além disso, agora falta arrumar as letras que ainda sobraram, ou seja um $T$ e um $R$ que posem ser permutadas de $2!$ modos. Assim, com a letra $L$ na posição central existem uma quantidade de quase palíndromos igual a:

$$6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 6!.$$

**Caso 2: A letra T na posição central.**
Raciocinando de modo completamente análogo ao Caso 1, podemos concluir que pondo a letra $T$ na posição central também temos uma quantidade igual a $6!$ de quase palídromos.
**Caso 3: A letra R na posição central.**
Análogo aos anteriores, dando uma quantidade igual a $6!$ de quase palídromos.
Portanto, o total de quase palídromos que podemos formar com as letras da palavra **NAATTNRARTRLA** é igual a:

$$6! + 6! + 6! = 3 \times 6! = 3 \times 720 = 2160.$$