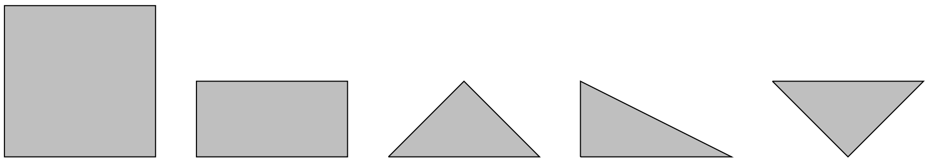
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 01 - Data 00/02/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Uma folha de papel quadrada é dobrada na metade e, em seguida, dobrada novamente na metade. Qual das figura a seguir

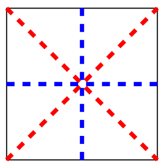


(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

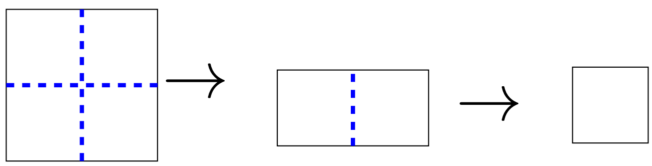
não pode representar a forma final da folha de papel inicial?

Solução

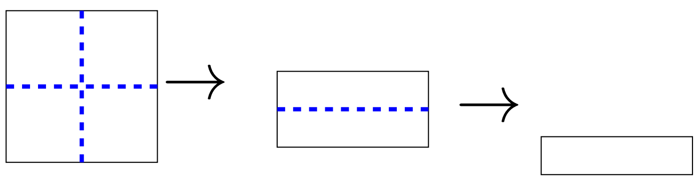
Um quadrado possui quatro eixos de simetria: aqueles que passam pelas metades dos lados e os que unem vértices opostos (que contém as diagonais), veja figura a seguir.



Assim, essencialmente tem-se dois eixos de simetria, o que significa que podemos dobrar a folha quadrada na metade juntando os pontos médios de lados opostos ou juntando vértices opostos.
Quando dobramos uma folha quadrada juntando os pontos médios de lados opostos, obtemos uma das figuras finais a seguir:

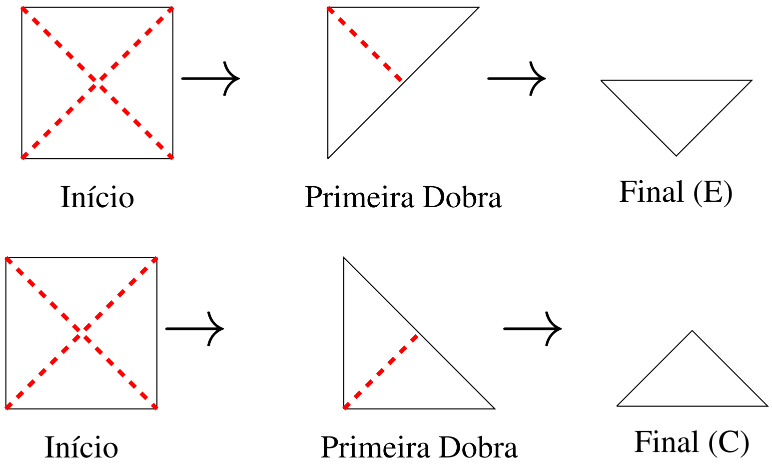


Início Primeira dobra Final (**A**)



Início Primeira dobra Final (**B**)

Quando dobramos a folha quadrada juntando os vértices opostos, obtemos uma das duas figuras a seguir:



Portanto, como realizamos todas as dobras possíveis, a alternativa $(\mathbf{D})$ é a que não pode ocorrer.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Durante a festa de Natal, Papai Noel distribuiu igualmente doces para as crianças: 47 chocolates e 74 marmeladas. Cada menina recebeu 1 chocolate a mais do que cada menino, mas cada um dos meninos recebeu 1 marmelada a mais do que cada menina.
Qual era o número total de crianças?

Solução

Cada criança tem o mesmo número de doces e o número total de doces é $74+47=121=11\times 11$. Sejam b a quantidade de meninos e c a quantidade de chocolates para cada garota. Assim, temos:

$$(c-1)\cdot b+c\cdot(11-b)=47 \;\Leftrightarrow\; 11c=47+b \;\Leftrightarrow\; c=\frac{47+b}{11}=\frac{11+(36+b)}{11}$$

$$\Leftrightarrow\; 0\leq c=1+\frac{36+b}{11}\leq 47.$$

Como c é um número natural, temos que 11 tem que dividir $36+b$, o que implica $b=8$ e $c=1+4=5$. Portanto, poderia haver: ou (a) 11 crianças, ou (b) 121, crianças ou (c) apenas 1 criança e cada criança receberia 11, 1 ou 121 doces respectivamente.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Alphonse e Beryl disputam um jogo com as seguintes regras:

- (1) Inicialmente, tem-se uma pilha com N pedras, com $N \geq 2$.
- (2) Os jogadores jogam alternativamente e Alphonse começa.
- (3) Na sua primeira jogada, Alphonse deve remover da pilha pelo menos 1 e no máximo $N-1$ pedras.
- (4) Se, na sua vez de jogar, um jogador remove k pedras, seu opositor, na sua jogada consecutiva, deve remover pelo menos 1 e no máximo $2k-1$ pedras.
- (5) O jogador que remove a última pedra, ganha o jogo.

(a) Determine quem deve ganhar o jogo quando $N = 7$ e explique a estratégia vencedora.
(b) Determine quem deve ganhar o jogo quando $N = 8$ e explique a estratégia vencedora.
(c) Determine todos os valores de N para os quais Beryl tem uma estratégia vencedora e explique esta estratégia.

Solução

(a) Alphonse vence.

Se Alphonse começa removendo 1 pedra, então pela regra (3), Beryl deve remover pelo menos 1 pedra e no máximo $2(1)-1=1$ pedra. Em outras palavras, Beryl deve remover 1 pedra.
Isto, por sua vez, força Alphonse para remover 1 pedra, e assim por diante. Continuando assim, Alphonse remove 1 pedra de uma pilha de tamanho qualquer em cada vez que for jogar e Beryl remove 1 pedra de uma pilha de mesmo tamanho em cada vez que for jogar. Assim, Alphonse remove a última pedra. Portanto, Alphonse vence removendo 1 pedra inicialmente, pois 7 é ímpar. (Na verdade, esse argumento mostra que Alphonse deve vencer sempre que N for ímpar.) (b) Beryl deve vencer.
A seguir, mostramos uma tabela na qual cada linha enumera uma possível combinação de movimentos numa disputa. Para $i = 1, 2, 3, 4$, notamos A_i, B_i como o i-ésimo movimento de Alphonse e Beryl, respectivamente. Na coluna de cada movimento indicamos o número de pedras removidas.

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	Vencedor
1	1	1	1	1	1	1	1	B
2	2	1	1	1	1			B
2	2	2	2					B
2	2	3	1					B
3	5							B
5	3							B
6	2							B
7	1							B

Assim, não importa o número de pedras que Alphonse remove inicialmente, há um movimento que Beryl que permite que ela ganhe. (Existem combinações possíveis de movimentos onde Alphonse vence que não estão listadas nesta tabela.) Portanto, Beryl deverá vencer quando $N = 8$.
Sua estratégia é:

- Se Alphonse remove 3 ou mais pedras, então ela pode remover as pedras restantes na pilha e vencer.

- Alphonse remove 1 ou 2 pedras na sua primeira jogada. Isso garante que o Alphonse recebe uma pilha com um número par de pedras e que ele pode remover não mais de 3 pedras em sua próxima jogada. Assim, Beryl pode ganhar, como a tabela acima mostra.

(c) Mostraremos que o Beryl tem uma estratégia vencedora, se e somente se $N = 2^m$, com m um inteiro positivo. Vamos dividir em casos: **-Caso 1:**
Se N for ímpar, sabemos que o Alphonse tem uma estratégia vencedora como em (a) (Alphonse remove 1 pedra, forçando o Beryl remover 1 pedra, e assim por diante).
-Caso 2: Se $N = 2$ então Beryl ganha, pois como Alphonse deve remover no início 1 pedra, então Beryl remove a pedra final restante.
-Caso 3:
Se $N = 2k$, com k inteiro maior do que 1. Neste caso, o jogador que possuir uma estratégia para $N = k$, terá uma estratégia para $N = 2^k$.
De fato, vamos mostrar que:

- Beryl tem uma estratégia vencedora para $N = 2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$ (em geral, para $N = 2^m$);
- Alphonse tem uma estratégia vencedora para $N = 2^m \cdot q$, onde q é um inteiro ímpar (pois Alphonse ganha para $N = q,\ 2q,\ 4q,\ 6k, \ldots$).

Suponha que $N = 2k$.

- Se na sua jogada inicial Alphonse remove um número par de pedras, Beryl, na sua jogada imediatamente após isso, tem de remover um número par de pedras (para que Alphonse não o force à derrota imediata), o que faz com que a pilha reste sempre um número par de pedras e cada jogador retire sempre um número para de pedras.
- Suponha que Alphonse tem uma estratégia vencedora para $N = k$, onde o jogo se desenvolve com as jogadas $A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2, \ldots$. Observe que A_2 depende de B_1, A_3 depende de B_2, e, assim por diante, de modo que:

$$1 \leq A_1 < k,\ \ B_1 < 2A_1,\ \ A_2 < 2B_1,$$

  a assim por diante. Com essa sequência de movimentos possíveis, no final Alphonse retirará a última pedra. Isto significa dizer que, para vencer o jogo quando $N = 2k$, Alphonse segue a sua estratégia vitoriosa para o caso em que $N = k$, removendo sempre duas vezes a quantidade removida quando $N = k$.
- Suponha que Beryl tenha uma estratégia vencedora para quando $N = k$.
  De maneira análoga ao caso anterior, Beryl tem uma estratégia vencedora para N = 2k, pois se Alphonse remove uma quantidade de pedras igual a $2a$, então ela remove $2b$ pedras, onde b é a resposta de Beryl à Alphonse na respectiva jogada no caso em que $N = k$.
  Portanto, Beryl ganha se e somente se $N = 2^m$, com m um inteiro positivo.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Considere um polinômio com coeficientes reais

$$f(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Albert Einstein e Homer Simpson disputam o jogo seguinte em que jogam alternadamente. Na sua vez de jogar, cada um deles escolhe um dos coeficientes a_{2011}, $a_{2010}, \ldots,$ a_1, a_0 e o substitui por um número real. Se o coeficiente foi escolhido por um dos jogadores, não pode ser mais alterado. Albert inicia o jogo. O jogo termina depois que todos os coeficientes forem substituídos.
Homer vence o jogo se o polinômio final $f(x)$ for divisível por um polinômio dado $m(x)$. Albert vence se o polinômio final não for divisível pelo polinômio dado $m(x)$.
(a) Qual dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora se $m(x) = x - 2012$?
(b) Qual dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora se $m(x) = x^2 + 1$?

Solução

Mostraremos que o Homer tem uma estratégia vencedora tanto no subitem (a) quanto n subitem (b).
(a) Observe que, como existem 2011 (número ímpar) coeficientes para serem substituídos, o último movimento é de Homer, e apenas o último movimento é importante. Homer ganha se e somente se $f(2012) = 0$, ou seja,

$$f(2012) = 2012^{2012} + a_{2011}2012^{2011} + a_{2010}2012^{2010} + \ldots + a_k 2012^k + \ldots + a_1 2012 + a_0 = 0. \qquad (*)$$

Suponha que todos os coeficientes já tenham sido substituídos por números reais restando só o coeficiente a_k. Neste caso, como Homer tem que garantir (*), restará uma equação do primeiro grau em a_k, que obviamente admite solução. Portanto, Homer vence.
(b) Considere os dois polinômios seguintes:

$$g(y) = a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^4 + \ldots + a_{2010} y^{1005} + y^{1006} \quad e \quad h(y) = a_1 + a_3 y + a_5 y^2 + \ldots + a_{2011} y^{1005}.$$

É fácil ver que:

$$f(x) = g(x^2) + h(x^2) \cdot x.$$

Neste caso, Homer vence se ele consegue tornar os polinòmios $g(y)$ e $h(y)$ divisíveis por $y+1$, ou seja g(-1) = h(-1) = 0. Observe que, no início do jogo $g(y)$ e $h(y)$ têm um número par de coeficientes indeterminados. Uma estratégia possível para Homer é seguir Albert: sempre que Albert atribui um valor para um coeficiente em g ou h, na jogada seguinte Homer escolhe o valor para um coeficiente no mesmo polinômio.
Desta forma, Homer defines o último coeficiente para g e também escolhe o último coeficiente para h. Da mesma forma que no subitem (a), Homer pode escolher estes dois últimos coeficientes de tal forma que tenhmos $g(-1) = 0$ e $h(-1) = 0$, vencendo o jogo.