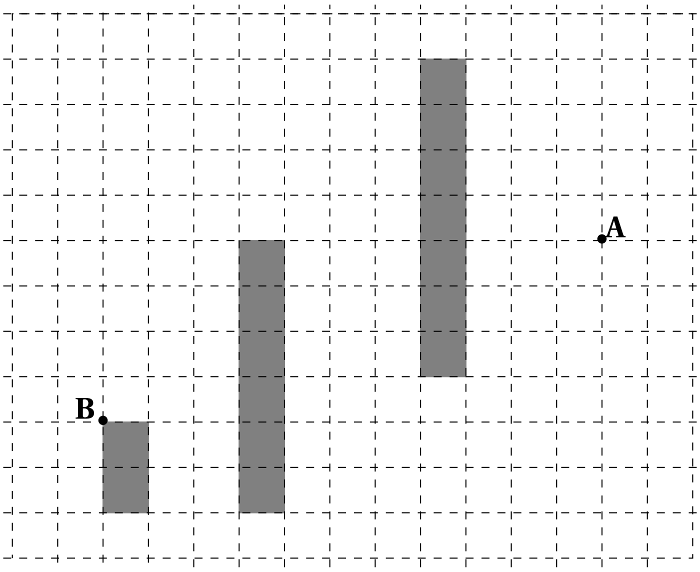
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 02 - Data 13/03/2017

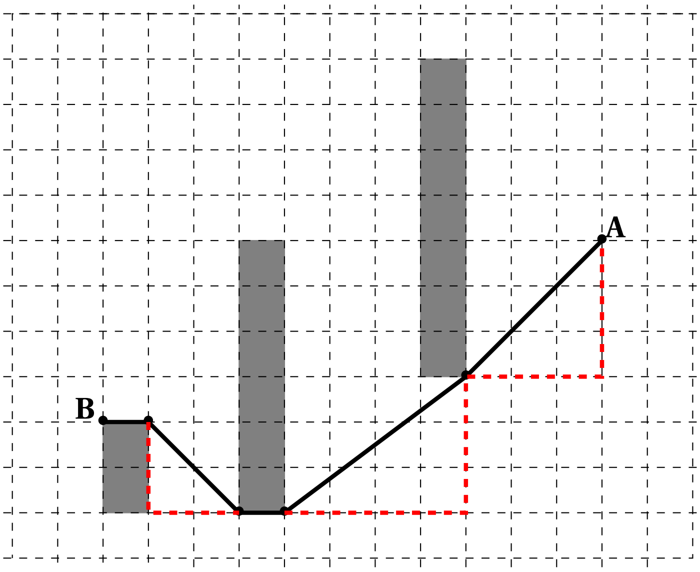
PROBLEMA PARA O NÍVEL I

O jovem Ali quer mover-se do ponto A ao ponto B, veja figura a seguir.



Ele não pode andar dentro das áreas pretas, mas ele é livre para se mover em qualquer direção dentro as áreas brancas (não somente na malha, mas em todo o plano).
Ajude o jovem Ali a encontrar o menor caminho entre os pontos A e B, desenhando o caminho e escrevendo seu comprimento.

Solução

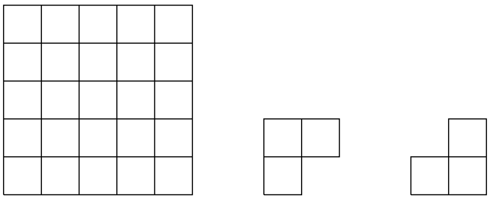


Usando o Teorema de Pitágoras, temos que o comprimento do caminho mínimo ligando o ponto A ao ponto B é igual a:

$$\sqrt{3^2+3^2}+\sqrt{3^2+4^2}+1+\sqrt{2^2+2^2}+1=7+5\sqrt{2}.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

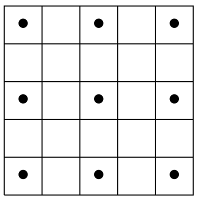
Dois jogadores, A e B, disputam o jogo seguinte. O jogador A marca várias casas de um tabuleiro 5×5. O jogador B vence ganha se ele pode cobrir todas as casas marcadas usando peças *esquinadas* 2×1 (ou 1×2), veja figura a seguir.



As peças *esquinadas* devem estar inteiramente dentro do tabuleiro e não se sobrepõem. Qual é o menor número de casas que o jogador A deve marcar para impedir que o jogador B vença?

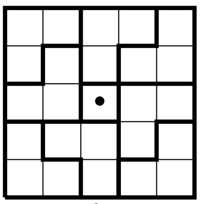
Solução

(INTERNATIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT OF TOWNS - Junior A-Level Paper, Spring 2014).
Se o jogador A marca 9 casas como na figura (A) a seguir

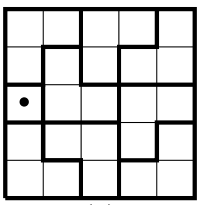


(**a**)

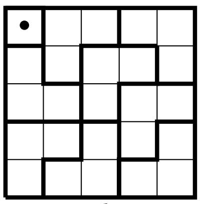
(a) O jogador B não pode cobri-las.
Com efeito, nenhuma peça **esquinada** pode cobrir mais de uma casa marcada, o que implica que o jogador B precisa de 9 peças **esquinada**. Ora, desse modo, as peças esquinadas cobririam 27 casas, enquanto todo o tabuleiro possui somente 25 casas.
(b) Se o jogador A marcar 8 casas, o jogador B pode não conseguir cobrir todas elas. Com efeito, uma das casas marcadas na figura (a) não seria coberta. No entanto, as restantes 24 casas podeam ser cobertas, veja as figura de (b) a (d) a seguir.



(**b**)



(**c**)



(**d**)

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Chamamos o ponto do plano $P=(m,n)$ de **ponto visível**, se ambas as coordenadas m, n são números inteiros, com $MDC(m,n)=1$.
Prove que existe um tabuleiro 100×100 no qual nenhuma das coordenadas dos vértices de suas 100^2 casas são pontos visíveis.

Solução

(Austin Shapiro) Inicialmente, em vez de encontrar um tabuleiro como o pedido, vamos mostrar que é possível encontrar uma casa, i.e. um quadrado 2×2, cujos vértices satisfazem ao problema.
De fato, sejam m, n números inteiros e (m,n), $(m-1,n)$, $(m,n-1)$, $(m-1,n-1)$ os vértices do quadrado. Escolheremos os inteiros m,n satisfazendo as seguintes condições:

- m,n são ambos divisíveis por 2. Equivalentemente, ambos m e n deixam resto 0 quando divididos por 2.
- $m-1,n$ são ambos divisíveis por 3. Equivalentemente, m deixa resto 1 quando dividido por 3, e n é divisível por 3.
- $m,n-1$ são ambos divisíveis por 5. Equivalentemente, m é divisível por 5, e n deixa resto 1 quando dividido por 5.
- $m-1,n-1$ são ambos divisíveis por 7. Equivalentemente, ambos m e n deixam resto 1 quando divididos por 7.

Colocando as condições em termos de congruências temos:

$$\begin{cases} m \equiv 1 \pmod 2\\ n \equiv 0 \pmod 3\\ m \equiv 0 \pmod 5\\ n \equiv 1 \pmod 5\\ m \equiv 1 \pmod 7\end{cases}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} m \equiv 1 \pmod 2\\ m \equiv 0 \pmod 5\\ m \equiv 1 \pmod 7\end{cases} \quad e \quad \begin{cases} n \equiv 0 \pmod 3\\ n \equiv 1 \pmod 5\end{cases}$$

Pelo Teorema Chinês de Restos, os dois sistemas de congruências acima admitem solução. É fácil ver que $m=190$ e $n=36$ é uma solução, o que significa dizer que os pontos obtidos a partir dos valores de m e n: $(190,36)$, $(189,36)$, $(190,35)$, $(189,35)$, são os vértices de um quadrado de lado com comprimento 2 e, além disso, todos estes pontos são invisíveis, pois suas coordenadas são divisíveis por 2, 3, 5 e 7, respectivamente.
Para o caso do tabuleiro 100×100 usamos raciocínio análogo ao que foi feito no caso do quadrado acima.
Para isso, consideramos o quadrado cujos vértices são: (m,n), $(m-99,n)$, $(m,n-99)$ e $(m-99,n-99)$. Agora, suponha que neste quadrado tenhamos uma lista de 10.000 pontos com ambas as coordenadas inteiras. Podemos admitir que ambas as coordenadas do $n-$ésimo ponto sejam divisíveis pelo $n-$ésimo número primo p_n. Com isso estabelecemos um sistema de congruências resultado do resto da divisão de m e n por p_n.

Pelo Teorema Chinês de Restos, existem inteiros m e n satisfazendo todas as 10.000 condições, ainda que esse números sejam enormes, o que garante que existe um tabuleiro 100×100 no qual nenhuma das coordenadas dos vértices de suas 100^2 casas são pontos visíveis.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Dado um inteiro $n > 1$, seja S_n o grupo das permutações dos números $1, 2, 3, \ldots, n$. Dois jogadores, A e B, disputam o seguinte jogo, em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada consiste em escolher um (único) elemento do grupo S_n. Não pode ser escolhido um elemento que já tenha sido escolhido. O jogo termina no momento em que os elementos escolhidos geram todo o grupo S_n. O jogador que faz o último movimento perde o jogo.
Quem vence: A ou B? Qual a estratégia vencedora?

Solução

(IMC 2012, Blagoevgrad, Bulgaria, 2012) (i)O jogador A vence o jogo quando $n = 2$ e quando $n = 3$.
Se $n = 2$, temos que $S_2 = \{\rho_0, \rho_1\}$, onde

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, basta o jogador A escolher a identidade $I = \rho_0$.
Se $n = 3$, temos que $S_2 = \{\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3\}$, onde

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, basta o jogador escolher um 3-ciclo: ρ_1 ou seu inverso ρ_2.
(ii) Se $n \geq 4$, o jogador B possui uma estratégia vencedora.
Se $n \geq 4$, cada subgrupo de S_n com ordem ímpar é subgrupo de A_n, o subgrupo das permutações pares. Daí, os subgrupos maximais têm a mesma ordem e o jogador B nunca perde.
Considere o momento quando todos os movimentos permitidos levam a derrota na jogada seguinte e seja H o subgrupo gerado pelos elementos selecionados pelos jogadores. Escolhendo um outro elemento do H ele não perderia imediatamente, então todos os elementos de H devem já ter sido escolhidos. Como H e qualquer outro elemento geram S_n, H deve ser um subgrupo maximal em S_n.
Se a ordem de H denotada por $|H|$, é par, então o próximo jogador é A, então B vence. Chamando de n_i a ordem do subgrupo gerado pelo primeiro i elementos escolhidos, temos a seguinte relação de divisibilidade:

$$n_1 | n_2 | n_3 | \ldots$$

Vamos mostrar que o jogador B pode obter n_2 par e $n_2 < n!$, o que segue que $|H|$ é par e o jogador A fará o último movimento, perdendo o jogo.
Chamemos de g o elemento escolhido pelo jogador A na sua primeira jogada. Se a ordem n_1 de g é par, então o jogador B pode escolher a permutação identidade id e ele terá $n_2 = n_1 < n!$.
Se n_1 é ímpar, então g é um produto de ciclos ímpares disjuntos, o que implica que é uma

permutação par. Então o jogador B pode escolher a permutação $h = (1,2)(3,4)$, que é outra permutação par. Uma vez que g e h são elementos do grupo alternado A_n, eles não conseguem gerar todo o grupo S_n.
Como a ordem de h é 2, o jogador B garante que $2|n$ e ele vence.