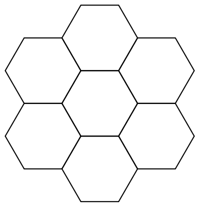
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº **03 - Data** 20/03/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Na figura a seguir, temos um hexágono arrodeado por seis hexágonos congruentes.



Em cada um dos sete hexágonos escreve-se um número inteiro positivo, de modo que não existam dois ou três hexágonos vizinhos cuja soma dos números neles escritos seja um múltiplo de 3.
Qual é a menor soma possível dos números escritos?

Observação: *Dois hexágonos são vizinhos se possuem um lado em comum e três hexágonos são vizinhos se possuem um vértice em comum.*

Solução

(Olimpíada Nacional Escolar - Perú - 2004 - Nível I) A resposta é 40.
Fatos que ajudam na solução do problema:

- quando dividimos um número inteiro por 3, os possiveis restos são: $0,\ 1\ ou\ 2$. Isto significa que, dado um inteiro positivo n, podemos escrever $n = 3q + r$, onde $q,\ r$ são números inteiros, q é o quociente e r é o resto, com $r = 0,\ 1\ ou\ 2$;

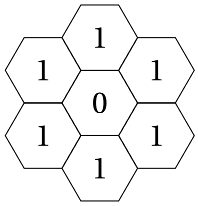
- A soma de dois números inteiros , $m\ e\ n$, é um múltiplo de 3 se: ambos os números são múltiplos de 3 (o resto da divisão por 3 é zero) ou um deixa resto 1 na divisão por 3 e o outro deixa resto 2;

- A soma de três números inteiros, $m,\ n\ e\ t$, é um múltiplo de 3 se: o primeiro deixa resto 1 na divisão por 3, o segundo deixa resto 2, e o terceiro deixa resto 0 na divisão por 3, em alguma ordem.

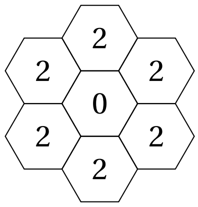
Assim, como estamos procurando soma divisível por 3, é conveniente substituir cada número escrito em qualquer um dos sete hexágonos pelo o correspondente resto na divisão por três.
Agora, a idéia da solução do problema é examinar os três casos seguintes, de acordo com o resto da divisão por 3 do número escrito no hexágono central:

- **O resto da divisão do número escrito no hexágono central é** 0.
  Neste caso, pelas hipóteses do problema não pode haver nenhum número escrito em um

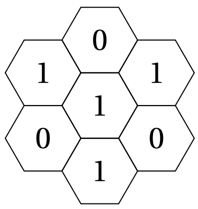
hexágono vizinho ao hexágono central cujo resto da divisão por 3 seja 0. Isto significa que todos os números escritos nos hexágonos do anel que envolve o hexágono central são iguais a 1, veja Figura a seguir.



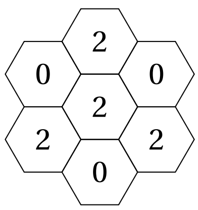
Além disso, não pode haver um dígito 1 e um dígito 2 em hexágonos vizinhos, pois juntando com o zero escrito no hexágono central formariam um terno de hexágonos cuja soma dos números escritos sria um múltiplo de 3. Assim, outra configuração possível seria a da Figura a seguir:



- **O resto da divisão do número escrito no hexágono central é** 1.
  Neste caso, pelas hipóteses do problema, não pode ter o dígito 2 escrito em qualquer hexágono vizinho ao hexágono central. Além disso, no anel que envolve o hexágono central, só pode ter 0 ou 1 e não pode ter dois dígitos 1 consecutivos, pois com o número escrito no hexágono central, teríamos três hexágonos vizinhos cuja soma dos números neles inscritos seria múltiplo de 3. É fácil ver que também não pode ter dois zeros consecutivos. Assim, teríamos a única forma possível para distribuir os números nos 7 hexágonos, veja a Figura seguinte:



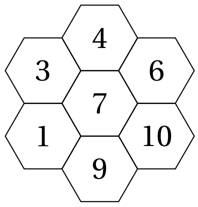
- **O resto da divisão do número escrito no hexágono central é** 2.
  Pelas hipóteses do problema não pode haver um número 1 escrito em um hexágono vizinho ao hexágono central. Logo, os números escritos nos hexágonos do anel que envolve o hexágono central só pode 0 ou 2. Além disso, é fácil ver que que não pode haver dois dígitos 2 em dois hexágonos consecutivos localizados no anel que envolve o hexágono central, pois, caso contrário, juntos com o número escrito no hexagono central teríamos três hexágonos cuja soma dos números seria divisível por 3. Do mesmo modo, não pode haver dois zeros consecutivos no anel que envolve o hexágono central. Assim, neste caso, teríamos a única forma possível para distribuir os números nos 7 hexágonos, veja a Figura seguinte:



Do exposto acima, temos quatro maneiras distintas de escrever os números nos 7 hexágonos da figura dada.
Para encontrar a menor soma possível, substituímos cada dígito i pelo menores números inteiros positivos distintos que são múltiplos de 3 mais i. Deste modo, teremos as seguintes somas possíveis:

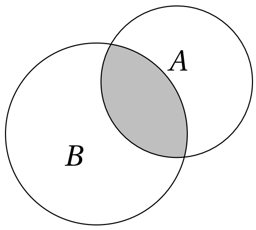
$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} 3 & + & 1 & + & 4 & + & 7 & + & 10 & + & 13 & + & 16 & = & 54 \\ 3 & + & 2 & + & 5 & + & 8 & + & 11 & + & 14 & + & 17 & = & 60 \\ 1 & + & 3 & + & 4 & + & 6 & + & 7 & + & 9 & + & 10 & = & 40 \\ 2 & + & 3 & + & 5 & + & 6 & + & 8 & + & 9 & + & 11 & = & 44 \end{array}\right.$$

Portanto, a menor soma possível é 40 e a configuração da dita soma é a da figura a seguir:



PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Um círculo de raio medindo 15 cm intercepta um outro círculo, de raio medindo 20 cm, num ângulo reto, veja Figura seguir.



Qual é a diferença das áreas não sobrepostas?

Solução

Sejam A e B os valores das áreas dos respectivos círculos: $A = \pi \cdot 15^2$ e $B = \pi \cdot 20^2$. Chamemos de C o valor da área comum aos dois círculos Assim, temos que o valor da diferença das áreas não sobrepostas será dada por:

$$|(A - C) - (B - C)| = |A - B|.$$

Deste modo, a resposta é

$$\pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 15^2 = 175 \cdot \pi.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Uma secretária digitou dez cartas e os correspondentes envelopes. Por descuido, colocou as cartas aleatoriamente nos envelopes, uma carta por cada envelope.
Qual é a probabilidade de que exatamente nove cartas foram colocadas corretamente nos envelopes?

Solução

A resposta é zero. Se as nove cartas estão nos envelopes corretos, a outra também tem de estar corretamente envelopada.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

(a) Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso nos reais, isto é, todo intervalo não vazio da reta possui uma infinidade de números racionais.
(b) Mostre que o conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso nos reais, isto é, todo intervalo não vazio da reta possui uma infinidade de números irracionais.

Solução

(i) Inicialmente, observe que todo intervalo aberto não vazio de $\mathbb{R}$ contém um intervalo do tipo (a,b), com $a,\ b \in \mathbb{R}$. Assim, podemos supor que o intervalo $I=(a,b)$.
Vamos mostrar que todo intervalo contém um número racional.
Ou seja, vamos mostrar que:

$$\text{Para todos números reais } a,\ b\ com\ a<b,\ existe\ r\in\mathbb{Q},\ com\ a<r<b. \qquad (*)$$

Para que um número racional $r=\frac{p}{q}$, com $p\in\mathbb{Z}$ e q um número inteiro positivo, pertença ao intervalo (a,b) temos que:

$$a<\frac{p}{q}<b \Leftrightarrow aq<p<bq.$$

Isto significa que temos que encontrar um número inteiro positivo q tal que o intervalo aberto (aq,qb) possua um número inteiro p. Mas, para isso, é suficiente que o comprimento do intervalo (aq,qb) seja estritamente maior do que 1. Assim, temos que:

$$qb-qa=q(a-b)>1 \Rightarrow q>\frac{1}{a-b}.$$

Questão: Existe de fato um tal inteiro q?
A propriedade de Arquimedes (Para todo todo número real x existe um número inteiro positivo n estritamente maior do que x) nos garante que existe um número natural $q>\frac{1}{a-b}$. Observe que, como $a-b>0$, temos que q é um número inteiro positivo. Agora, basta tomar p como sendo $p>[qa]+1$, onde $[qa]$ significa o menor inteiro que é maior do que ou igual a qa.
Logo, $p-1\le aq<p$, que implica por um lado que $\frac{p}{q}>a$ e, por outro lado, $\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\le a$, o que implica $\frac{p}{q}\le a+\frac{1}{q}<a+b-a=b$.
Portanto, temos que $\frac{p}{q}\in(a,b)$, como queríamos provar [afirmação (*)]. No ítem (iii), provaremos que todo intervalo possui infinitos racionais.

(ii) Vamos mostrar que todo intervalo aberto da reta possui um número irracional.
Sejam $a,\ b\in\mathbb{R}$, com $a<b$. Podemos aplicar a afirmação (*) para o intervalo $(a-\sqrt{2},b-\sqrt{2})$.
Ou seja, existe um número racional $r\in(a-\sqrt{2},b-\sqrt{2})$.
Por outro lado, é fácil ver que o número $r+\sqrt{2}\in(a,b)$ e que $r+\sqrt{2}$ é irracional, pois, caso contrário, teríamos que

$$\sqrt{2}=r+\sqrt{2}-r\ \ seria\ um\ número\ racional,$$

como soma de dois números racionais, que é uma contradição, pois sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Portanto, todo intervalo aberto da reta possui um número irracional.

(iii) Vamos mostrar que todo intervalo da reta possui uma infinidade de números racionais e uma infinidade de números irracionais.
Para isso, seja N um número inteiro maior do que ou igual a 1 e considere a coleção dos N intervalos abertos

$$\Big(a,\ a+\frac{b-a}{N}\Big),\ \Big(a+\frac{b-a}{N},\ a+\frac{2(b-a)}{N}\Big),\ \Big(a+\frac{2(b-a)}{N},\ a+\frac{3(b-a)}{N}\Big),\ \ldots,\ \Big(a+\frac{(N-1)(b-a)}{N}, b\Big).$$

Pelo que vimos acima, cada um destes intervalos possui um número racional e um número irracional, o que implica que o intervalo (a,b) possui pelo menos N números racionais e N números irracionais. Como isto é verdade para todo número inteiro $N \geq 1$, segue que o intervalo (a,b) possui uma infinidade de números racionais e uma infinidade de números irracionais, o que implica que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso nos reais e que que o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso nos reais.