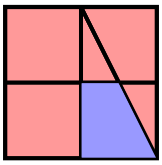
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 04 - Data 27/03/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

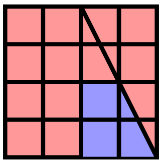
Na figura a seguir, temos um quadrado de lado medindo a, dividido em quatro quadrados menores congruentes, com lados medindo $\frac{a}{2}$, e um segmento ligando o ponto médio do lado superior ao vértice inferior direito do quadrado.



Que fração da área do quadrado está pintada de azul?

Solução

Dividindo o quadrado dado 16 quadrados congruente de lados medindo $\frac{a}{4}$, veja Figura a seguir,



é fácil ver que a fração de área pedida é igual ao quociente da área do trapézio azul sobre a área do quadrado maior dado:

$$\frac{\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{4}}{2}\cdot\frac{a}{2}}{16a^2}=\frac{3}{16}.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Ordenar em linha reta os 20 números naturais de 1 até 20 para que as 19 somas de dois números consecutivos seja um número primo.

Solução

Basta escrever:

20 3 4 7 6 11 8 15 14 17 12 19 18 13 16 1 10 9 2 5.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Seja S o subconjunto de números naturais de 1 a 1001, isto é $S = \{1, 2, 3, \ldots, 1001\}$. Lisandro pensa num número K de S, e Carla tem de descobrir esse número com o procedimento a seguir. Ela mostra a Lisandro uma lista de subconjuntos de S, Lisandro lê e diz a Carla quantos subconjuntos da sua lista contenham o número K. Se Carla quer, pode-se repetir o procedimento com uma segunda lista e depois com uma terceiro, mas não é permitido com mais do que 3 listas.
Qual é a menor quantidade total de subconjuntos que permite que Carla encontre efetivamente o número K?

Solução

(OMA-2015) A resposta é 28.
Seja x o número de subconjuntos de primeira lista, y o número de subconjunto da segunda lista e z o número de subconjunto da terceira.
Observe que Carla recebe a informação de Lisando que corresponde a quantidade de subconjunto de S que contém o número K em cada um dos três procedimentos possíveis. Vamos chamar esses três números de (R_1, R_2, R_3). Veja que, para que Carla possa adivinhar o número de Lisandro, cada terno possível (R_1, R_2, R_3) deve correponder a um único número de S. Caso contrário, dois números de Lisandro iria fornecer-lhe as mesmas informações, e ela não conseguiria decidir qual é o número K.
A quantidade de ternos (R_1, R_2, R_3) pode ser contada do seguinte modo:

- O valor de R_1 pode variar de 0 (quando o número não está em nenhum dos subconjuntos dados), até x (quando o número está em todos os subconjuntos inicialmente dados);
- Da mesmo modo, o valor de R_2 pode variar 0 até y;
- O valor de R_3 pode variar de 0 até z.

Deste modo, existem $(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)$ ternos possíveis (R_1, R_2, R_3), e, pela observação anterior, a quantidade de ternos possíveis deve ser maior do que 1001, para que não haja repetição. Assim, temos que:

$$(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1) \geq 1001.$$

Pelo Teorema das Média Aritmética e Geométrica, temos

$$\frac{(x+1)+(y+1)+(z+1)}{3} \geq \sqrt[3]{(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)} \geq \sqrt[3]{1001} \Rightarrow (x+1)+(y+1)+(z+1) \geq 3\sqrt[3]{1001}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z \geq 3\sqrt[3]{1001} - 3 \approx 3 \times 10{,}0033 - 3 \approx 27{,}0099 \Rightarrow x+y+z \geq 28.$$

Agora, veremos que com 28 subconjuntos Carla pode encontrar o número K.
Como $1001 = 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13$, separamos os 1001 números em 7 subconjuntos disjuntos, cada um deles com 143 elementos. A cada um destes 7 subconjuntos atribuimos um número distinto de 0 a 6. Este valor vai ser o número de vezes que aparece cada número do subconjunto na lista de Carla, o que implica que vão ser necessários 6 subconjuntos.
Quando Lisandro responde a Carla, a resposta vai corresponder a exatamente um subconjunto (eles são disjuntos). Agora Carla vai ter 143 possíveis valores para o valor de K.
Repita o procedimento agora sobre os números restantes mas com 11 subconjuntos disjuntos, cada um deles com 13 elementos. Finalmente, usamos: $6+10+12 = 28$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Diga, justificando, se existe um conjunto de infinito M de inteiros positivos tal que para quaisquer $a,\ b \in M,\ com\ a < b,$ a soma $a+b$ é um **número inteiro livre de quadrado**?

(Um número inteiro positivo k é chamado ***livre de quadrado*** *se nenhum quadrado perfeito maior que 1 divide k.)*

Solução

(IMC 2013, Blagoevgrad, Bulgaria - 2013). A resposta é sim.
A ideia é construir, por indução, uma sequência infinita

$$1 < n_1 < 2 = n_2 < n_3 < \ldots,$$

tal que $n_i + n_j$ seja livre de quadrados para $n_i < n_j$.
Suponha que já temos alguns números da nossa sequência: $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k,$ para $k \geq 2$. Vamos encontrar o próximo número da sequência: n_{k+1}.
Escolheremos n_{k+1} como sendo o número $n_{k+1} = 1 + Mx,$ onde $M = [(n_1 + n_2 + \ldots + n_k + k)!]^2$ e x é algum inteiro positivo (que iremos identificar mais adiante).
Para $i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ k,$ temos $n_i + n_{k+1} = 1 + Mx + n_i = (1+n_i)m_i,$ onde $MDC(M, m_i) = 1$, o que implica que qualquer quadrado perfeito dividindo $1 + Mx + n_i$ é relativamente primo com M.
Para encontrar o inteiro x, tomamos um inteiro N suficientemente grande e $x = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N$.
Se um valor de x, com $1 \leq x \leq N$ não satisfaz ao problema, significa que existe um índice $1 \leq i \leq k$ e algum número primo p para o qual p^2 divide $1 + Mx + n_i$. Para $p \leq 2k$ isto é impossível porque $p|M$. Além disso, $p^2 \leq 1 + Mx + n_i$ para uma progressão aritmética de razão p^2. Portanto, existe no máximo $\frac{N}{p^2} + 1$ de tais valores. No total, a quantidade de valores de x inadequados é menor do que

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{2k<p<\sqrt{M(N+1)}} \left(\frac{N}{p^2}+1\right) < k\cdot\left(N\sum_{p>2k}\frac{1}{p^2} + \sum_{p<\sqrt{M(N+1)}} 1\right) <$$

$$< kN\sum_{p>2k}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right) + k\sqrt{M(N+1)} < \frac{N}{2} + k\sqrt{M(N+1)}.$$

Se N é suficientemente grande, então isto é menor do que $N,$ e existe uma escolha apropriada para x.