**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE**

**LISTA SEMANAL Nº 05 - Data** 03/04/2017

**PROBLEMA PARA O NÍVEL I**

Um servo desonesto tem um método para roubar vinho. Ele remove $3$ taças de vinho de um barril e as substitui por $3$ taças de água. No dia seguinte ele quer mais vinho, então ele faz a mesma coisa: ele remove $3$ taças do mesmo barril (agora com vinho diluído) e as substitui por $3$ taças de água. No terceiro dia ele repete isso mais uma vez, retirando no total, ao longo dos três dias, $9$ taças de vinho que ele substituiu por $9$ taças de água. Como resultado desse roubo, agora o barril possui $50\%$ de vinho e $50\%$ de água.
Quantas taças de vinho estavam originalmente no barril?

**Solução**

Suponha que no início o barril tinha uma quantidade de $x$ taças de vinho. Vamos examinar a quantidade de vinho que permanesse no barril e a concentração de vinho na mistura de água e vinho em cada etapa do processo. Inicialmente, o barril tinha $x$ taças de vinho e que representa $100\%$ de vinho (uma concentração de $1$):

| Passo | Quantidade de taças de vinho | Concentração de Vinho |
|---|---|---|
| 0 | x | 1 |

Quando o servo faz a primeira intervenção, tirando $3$ taças de vinho e as substituindo por $3$ taças de água, a quantidade de vinho da segunda coluna da tabela se transforma em $x-3$, e a concentração (que está na terceira coluna da tabela) é a quantidade de vinho passa a ser a quantidade de vinho $x-3$ dividido pelo volume total de líquido, que é $x$: $\frac{x-3}{x}$., veja tabela a seguir:

| Passo | Quantidade de taças de vinho | Concentração de Vinho |
|---|---|---|
| 0 | $q_0 = x$ | $c_0 = 1$ |
| 1 | $q_1 = x-3$ | $c_1 = \frac{q_1}{x} = \frac{x-3}{x}$ |

No segundo passo, o servo remove $3$ taças do barril, e cada taça contém uma concentração de $1-\frac{3}{x}$ de vinho. A quantidade de vinho na segunda coluna da tabela passa a ser igual a $(x-3) - 3(1-\frac{3}{x}) = (x-3) - \frac{3(x-3)}{x} = \frac{(x-3)^2}{x}$, e a concentração é a quantidade de vinho dividido pelo volume total de líquido: $\frac{(x-3)^2}{x}$, veja na tabela a seguir:

| Passo | Quantidade de taças de vinho | Concentração de Vinho |
|---|---|---|
| 0 | $q_0 = x$ | $c_0 = 1$ |
| 1 | $q_1 = (x-3)$ | $c_1 = \frac{q_1}{x} = \frac{(x-3)}{x}$ |
| 2 | $q_2 = (x-3) - \frac{3(x-3)}{x} = \frac{(x-3)^2}{x}$ | $c_1 = \frac{q_2}{x} = \frac{(x-3)^2}{x^2}$ |

Finalmente, o servo remove mais $3$ taças do barril, e cada taça contém uma concentração $(1-3/x)^2$ de vinho. Assim, a quantidade de vinho na coluna à esquerda da tabela é igual a $x-6+\frac{9}{x} - 3(1-\frac{3}{x})^2 = \frac{(1-\frac{3}{x})^3}{x^2}$, e a concentração é igual a quantidade de vinho dividido pelo volume total de líquido, que é $x$, dando um total de $\frac{\frac{(1-\frac{3}{x})^3}{x^2}}{x}$, veja na tabela a seguir:

| Passo | Quantidade de vinho | Concentração de Vinho |
|---|---|---|
| 0 | $q_0 = x$ | $c_0 = 1$ |
| 1 | $q_1 = (x-3)$ | $c_1 = \frac{q_1}{x} = \frac{(x-3)}{x}$ |
| 2 | $q_2 = (x-3) - \frac{3(x-3)}{x} = \frac{(x-3)^2}{x}$ | $c_2 = \frac{q_2}{x} = \frac{(x-3)^2}{x^2}$ |
| 3 | $q_3 = \frac{(x-3)^3}{x^2}$ | $c_3 = \frac{q_3}{x} = \frac{(x-3)^3}{x^3}$ |

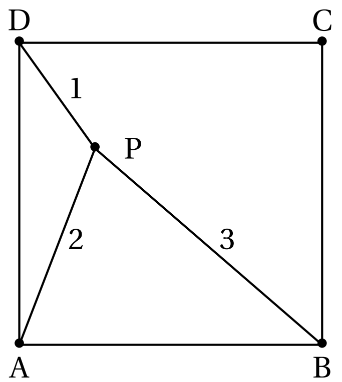
Como a concentração ao final é $50\%$, temos que $c_3 = \frac{(x-3)^3}{x^3} = \frac{1}{2}$, que é equivalente a

$$2(x-3)^3 = x^3 \Leftrightarrow (1-\frac{3}{x})^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} \approx 14.54 \text{ taças.}$$

Portanto, o barril original continha aproximadamente $14,5$ taças de vinho.

**PROBLEMA PARA O NÍVEL II**

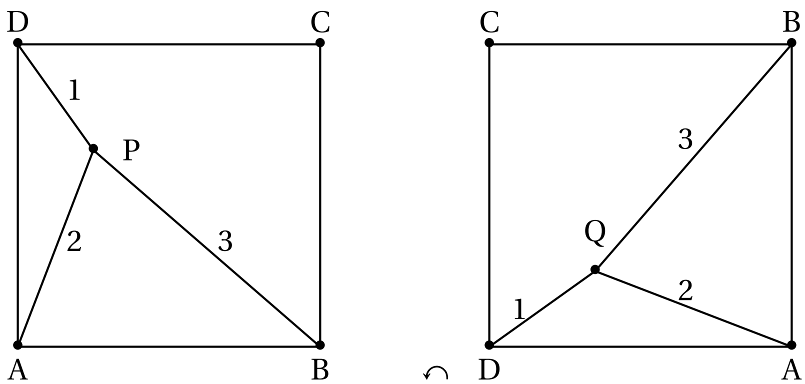
Um ponto $P$, está localizado na região limitada por um quadrado de modo que as distâncias de $P$ a três vértices consecutivos são: $1$, $2$ e $3$ unidades, veja Figura a seguir.



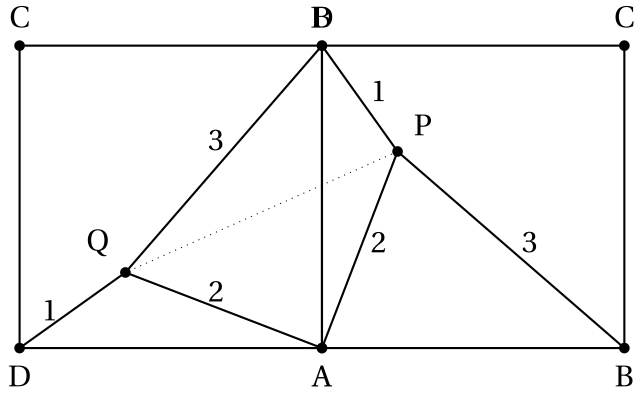

Qual é a medida em graus do ângulo $APD$?

**Solução**

Girando o quadrado dado, em torno do seu centro, de uma ângulo de $90°$, o ponto $P$ vai ocupar a posição $Q$, veja figura a seguir.




Agora, junte os dois quadrados, veja Figura a seguir.




Agora, observe que os dois segmentos de comprimento $2$ unidades são perpendiculares e constituem os lados de um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa $QP$ mede $2\cdot\sqrt{2}$.
Por outro lado, os segmentos de comprimentos $1$, $2\cdot\sqrt{2}$ e $3$ também formam um triângulo retângulo. Portanto, o ângulo $P$ formado pelos os segmentos de comprimentos $1$ e $2$ mede:

$$45^\circ + 90^\circ = 135^\circ.$$

## PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Três jogadores disputam o jogo "**pedra-papel-tesoura**". Em cada rodada, cada jogador simultaneamente mostra uma dessas formas. Pedra ganha da tesoura, tesoura ganha do papel, enquanto o papel ganha da pedra. Se em uma rodada exatamente duas formas distintas, são mostrados (e, portanto, uma delas é mostrada duas vezes), $1$ ponto será adicionado à pontuação do jogador que mostrou a forma vencedora, caso contrário, nenhum ponto é adicionado. Depois de várias rodadas, cada forma tinha sido mostrada o mesmo número de vezes.
Provar que, neste momento, a soma total de pontos era um múltiplo de $3$.

**Solução**

Se consideramos que a pedra vale $0$, o papel vale $1$ e a tesoura vale $2$, então a quantidade de pontos numa rodada é igual, módulo $3$, à soma dos números associados às três formas mostradas.
Se mostraram **três** forma distintas, a soma dos números associados às três formas mostradas é $0+1+2=3 \equiv 0\ (mod\ 3)$.
Se tiver dois ganhadores e um perdedor, a soma dos números associados às três formas mostradas é igual a $(x+1)+(x+1)+x \equiv 2\ (mod\ 3)$, onde $x=0$, $1$ ou $2$.
Se tiver um ganhador e dois perdedores, a soma dos números associados às três formas mostradas é igual a $(x+1)+x+x \equiv 1\ (mod\ 3)$, onde $x=0$, $1$ ou $2$.
Portanto, se ao final de várias rodadas cada opção aconteceu $n$ vezes, a quantidade de pontos repartidos no total, que é a soma dos pontos repartidos em cada rodada, é congruente módulo 3 ao número

$$n\times 0 + n\times 1 + n\times 2 = 3n \equiv 0\ (mod\ 3).$$

## PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $M$ um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ tal que o produto de quaisquer três elementos distintos em $M$ não seja um quadrado perfeito. Determine o número máximo de elementos de $M$.

**Solução**

Observe que o produto dos três elementos em cada um dos subconjuntos a seguir é um quadrado perfeito:

$$\{1,4,\ 9\},\ \{2,\ 6,\ 12\},\ \{3,\ 5,\ 15\},\ \{7,\ 8,\ 14\}.$$

Logo, nenhum desses conjuntos é um subconjunto de $M$. Como eles são disjuntos, segue que $M$ possui no máximo $15-4=11$ elementos.
Como $10$ não é um elemento dos conjutos acima mencionados, se $10$ não está em $M$, então $M$ possui no máximo $10$ elementos.
Se $10$ está em $M$, então nenhum dos subconjuntos seguinte é um subconjunto de $M$:

$$\{2,\ 5\},\ \{6,\ 5\},\ \{1,\ 4,9\},\ \{7,\ 8,\ 9\}.$$

Se $\{3,\ 2\}$ não é um subconjunto de $M$, segue que $M$ possui no máximo $10$ elementos.
Se $\{3,\ 2\}$ é um subconjunto de $M$, segue que nenhum dos sobconjuntos seguintes é um subconjunto de $M$:

$$\{1\},\ \{4\},\ \{9\},\ \{2,\ 6\},\ \{5,\ 15\},\ \{7,\ 8,\ 14\}.$$

Logo, $M$ possui no máximo $9$ elementos.
Portanto, $M$ possui no máximo $10$ elementos e, como exemplo, o conjunto

$$M=\{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\}$$

possui as propriedades desejadas.