OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 06 - Data 10/04/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Paulinho e Augusto participaram de uma corrida. Ao final da corrida, a quantidade de corredores que chegou antes de Paulinho foi igual a quantidade dos que chegaram depois dele. A quantidade dos corredores que chegaram antes de Augusto é igual ao triplo dos que chegaram depois dele. Além disso, houveram exatamente 10 participantes de ficaram entre Paulinho e Augusto, sem contar eles.
Determinar quantos corredores participaram da corrida.

Solução

Observe que Paulinho chegou antes de Augusto. Seja m a quantidade de corredores que chegaram antes e depois de Paulinho. Assim, o total de corredores é igual a $2m+1$. Agora, observe que a quantidade de corredores que chegaram antes de Augusto é igual a $(m+11)$ e a quantidade de corredores que chegaram após Augusto é igual a $\frac{m+11}{3}$. Logo, todos esses constituem um total de $(m+1)+\frac{m+11}{3}+1+11$. Assim, temos que:

$$(m+1)+\frac{m+11}{3}+1+11=2m+1 \Leftrightarrow 3(m+1)+(m+11)+3+33=6m+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m+47=6m+3 \Rightarrow 2m=44 \Rightarrow m=22.$$

Portanto, a quantidade total de corredores é igual a

$$2m+1=2\cdot 2\cdot 22+1=45.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Existem 2012 lâmpadas dispostas sobre uma mesa. Duas pessoas, A e B, disputam o jogo seguinte em que fazem seus movimentos alternadamente. O jogador A começa. Um movimento consiste acionar o interruptor de uma lâmpada para acendê-la ou apagá-la, mas um jogador nunca deve produzir um arranjo das lâmpadas que já tenha aparecido sobre a mesa. Um jogador que não puder excutar seu movimento perde o jogo.
Qual jogador tem uma estratégia vencedora?

Solução

O jogador A possui uma estratégia vencedora.

Jogador A escolhe uma das lâmpadas e ficar acendendo ou apagando esta mesma lâmpadacada vez que for fazer seu movimento. Pelas hipóteses do problema, o jogador B não pode alterar o estado desta lâmpada escolhida inicialmente pelo jogador A, ele sempre tem que que mudar o estado de alguma outra luz para que o arranjo das outras lâmpadas se torna diferentes de qualquer um que já ocorreu sobre a mesa. Portanto, o jogador A sempre tem um movimento para executar e vai haver um instante em que o jogador B eventualmente esgota os movimentos possíveis, perdendo o jogo.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Se escrevemos em ordem crescente todos os inteiros positivos que são relativamente primos com 105, qual é o $1000-$ésimo termo?

Solução

A quantidade de inteiros positivos menores do que 105 e relativamente primos com $105 = 3\times5\times7$

é dada pela função de Euler

$$\varphi(105) = 105\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right) = 48.$$

Sejam $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{48}$ a relação dos inteiros positivos **menores do que** 105 e relativamente primos com 105.
A nossa lista de inteiros positivos e relativamente primos com 105 começa com

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 22,\ 23,\ldots.$$

Observe que, se a é um inteiro, segue que $MDC(105+a,105) = MDC(a,105)$. Assim, se a é relativamente primo com 105, então $105-a$ é relativamente primo com 105. Assim podemos concluir que:

$$a_{48} = 105-1 = 104,\ a_{47} = 105-2 = 103,\ a_{46} = 105-4 = 101,\ a_{45} = 105-8 = 97,\ a_{44} = 105-11 = 94,$$

$$a_{43} = 105-13 = 92,\ a_{42} = 105-16 = 89,\ a_{41} = 105-17 = 84,\ a_{40} = 105-19 = 86,\ \ldots$$

Por outro lado, $1000 = 20\times48+40$, que implica o $1000-$ésimo termo será igual a

$$105\times20+40 = 105\times20+a_{40} = 2100+86 = 2186.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Sejam x e y números reais tais que

$$(x-1)^3+2017(x-1) = -1 \qquad e \qquad (y-1)^3+2017(y-1) = 1$$

Qual é o valor de $x+y$?

Solução

Considere a função $f(t) = t^3+2017t$ e observe que ela é uma função crescente, portanto, injetiva.

Veja que, como $f(y-1) = (y-1)^3+2017(y-1) = 1$, segue que $f(1-y) = (1-y)^3+2017(1-y) = -1$
Como, por hipótese, temos $f(x-1) = f(1-y)$ segue que

$$x-1 = 1-y \Rightarrow x+y = 2$$

.