OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 07 - Data 01/05/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Uma moeda circular A rola, sem deslizar, ao longo da circunferência de uma outra moeda circular B com raio duas vezes o raio da moeda A, e que está parada. Seja x o número de graus que a moeda A faz em torno de seu centro até que ela retorna à posição inicial. Encontrar o valor de x.

Solução

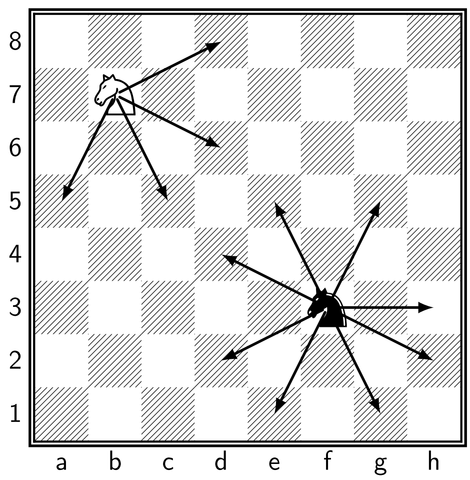
O número de voltas completas dadas pela moeda A é a soma de dois componentes: o número de revoluções (1) em torno da moeda parada, B, e o número da volta completas de A em torno do próprio eixo (perpendicular ao plano e passando pelo seu centro), determinado pela distância percorrida ao longo da circunferência de B.
Assim, o número de voltas completas é igual a

$$1+\frac{2\pi(2r)}{2\pi r}=1+2=3.$$

Portanto, o número de graus é igual $3\times 360=1080$.

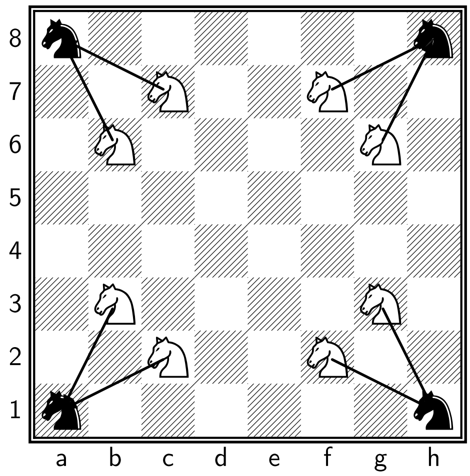
PROBLEMA PARA O NÍVEL II

De quantas maneiras podemos colocar um **cavalo branco** e um **cavalo preto** num tabuleiro de xadrez (8×8), de modo que um não fique em posição de ataque iminente ao outro? (Na figura a seguir, ilustramos o movimento do cavalo).



Solução

Sem levar em consideração que um cavalo fique no tabuleiro em posição de ataque ao outro, a primeira peça pode ocupar qualquer uma das 64 casas do tabuleiro e, uma vez colocado esta peça, a segunda pode ocupar qualquer uma das 63 casas restantes. Assim, existem $64 \times 63 = 4032$ possibilidades de se colocar as duas peças sem qualquer restrição.
Agora, temos de retirar, da quantidade acima obtida, todas as possibilidades que permitem o ataque iminente de uma peça à outra.
Para isso, vamos imaginar que inicialmente coloquemos o cavalo preto no tabuleiro de xadrez. Como é aleatória a escolha da casa em que se pode colocar o cavalo preto, a idéia é mapear o tabuleiro colocando em cada casa o número que representa a quantidade de casas nas quais o cavalo branco estaria em posição iminente de ataque ao cavalo preto colocado naquela casa.
Por exemplo, as casas nas posição $a1$, $a8$, $h1$, $h8$ recebem o número 2, pois, para cada uma delas, existem exatamente duas possibilidades para colocarmos o cavalo branco para um ataque iminente ao cavalo preto, veja na figura a seguir.



Deste modo, podemos mapear todo o tabuleiro da seguinte maneira:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	3
3	4	6	6	6	6	4	2
2	3	4	4	4	4	3	2

Assim, uma vez colocado o cavalo preto numa casa qualquer, a quantidade de casas para as quais **não** devem ser colocado o cavalo branco é igual a

$$4 \times 2 + 8 \times 3 + 20 \times 4 + 16 \times 6 + 16 \times 8 = 336.$$

Portanto, podemos colocar um **cavalo branco** e um **cavalo preto** num tabuleiro de xadrez (8×8), de modo que um não fique em posição de ataque iminente ao outro, de $4032-336=3696$ maneiras distintas.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

A soma dos quadrados de 50 números inteiros ímpares consecutivos é igual a 300.850. Encontre o maior número ímpar cujo quadrado é o último termo da soma.

Solução

Sejam $a+2,\ a+4,\ a+6,\ldots,\ a+100$ os 50 números inteiros ímpares consecutivos.. Assim, temos:

$$(a+2)^2+(a+4)^2+(a+6)^2+\ldots+(a+100)^2=300.850 \qquad (*)$$

Seja $b=a+51$. Podemos reescrever as parcelas acima como:

$$a+2=a-49+51=a+51-49=b-49$$

$$a+100=a+51+49=b+49$$

$$a+4=a+51-47=b-47$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Logo, a igualdade (*) pode ser escrita como:

$$[(b-49)^2+(b+49)^2]+[(b-47)^2+(b+470^2]+\ldots+[(y-1)^2+(y+1)^2]=300.850 \qquad (**)$$

Desenvolvendo cada paracela de $(**)$, obtemos

$$50b^2+2(1^2+3^2+\ldots+49^2)=300.850 \qquad (***)$$

Agora, observe que, como

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

é fácil ver que:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=$$

$$=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2)-(2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2)=$$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-(2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-4(1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n)^2)$$

Por outro lado, temos que

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Assim, temos que

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{4}{3}n^3-\frac{n}{3}.$$

Agora, observe que: $2n-1=49\Rightarrow\ n=25$, que implica

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(49)^2=\frac{4}{3}25^3-\frac{25}{3}=20825.$$

Logo, reescrevendo a equação $(***)$, obtemos:

$$50b^2+2\times 20825=300850 \Rightarrow 50b^2=259200 \Rightarrow b=72.$$

Como $b=a+51$, segue que $a=21$. Portanto, o maior número ímpar cujo quadrado é o último termo da soma é

$$a+100=21+100=121.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

No interior da região limitada por um círculo marcam-se $1.000.000$ pontos. É possível encontrar uma reta que não passe por qualquer um dos pontos dados e que divida a região limitada pelo círculo em duas partes, cada uma delas contendo exatamente 500.000 pontos?

Solução

A afirmação é um caso especial do seguinte fato:
Dados $k+m$ pontos na região limitada por um círculo, existe uma reta, que não passa por qualquer um dos pontos dados e divide o círculo em duas partes, uma das quais contém k dos pontos dados e a outra contém os m pontos restante.
Para ver isto, observe que a quantidade de retas que passa por um par destes $k+m$ pontos é ?nita; na verdade, é menor do que ou igual a $\binom{m+k}{2}$. Como o número de orientações determinadas por estas retas é ?nito, existe uma reta d cuja direção não é paralela a qualquer uma das retas determinadas por qualquer par de pontos desses pontos dados. Seja AA' o diâmetro do círculo cuja direção é perpendicular à reta d. Projetando os pontos dados sobre o segmento de reta AA', obtém-se $k+m$ pontos distintos. Indo de A para A' se P é o $k-$ésimo ponto e Q é o $(k+1)-$ésimo ponto, então qualquer reta perpendicular a AA' em qualquer ponto entre P e Q não passa por qualquer ponto na região limitada pelo círculo e ainda divide o círculo em duas partes, uma das quais contém k pontos, incluindo o ponto P, e a outra contém os restantes m pontos.