XXVIII OLIMPÍADA DE MATEMATICA
DO RIO GRANDE DO NORTE 2017- PRIMEIRA FASE
SOLUÇÃO DA PROVA DO NÍVEL I

PARA CADA QUESTÃO, ASSINALE **UMA** ALTERNATIVA COMO A RESPOSTA CORRETA

NOME DO(A) ESTUDANTE: ______________________________
ESCOLA: ______________________________

1. Na figura a seguir, os números em ambas as filas possuem a mesma soma.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	299
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	♣

O valor de ♣ é:

◯ (a) 199
◯ (b) 144
◯ (c) 155
◯ (d) 509
◯ (e) 299

Solução

A resposta correta é a alternatica (a).
A soma dos números escritos na primeira fila é igual a

$$F_1 = 1+2+3+\ldots+10+299 = \frac{10\cdot(10+1)}{2} + 299 = 55+299 = 354.$$

A soma dos números escritos na segunda fila é igual a

$$F_2 = 11+12+13+\ldots+19+20+\clubsuit = \frac{10\cdot(20+11)}{2} + \clubsuit = 155+\clubsuit.$$

Como $F_1 = F_2$, temos

$$155+\clubsuit = 354 \Rightarrow \clubsuit = 354-155 = 199.$$

2. Um barril de vinho cheio pesa 35 kg. Quando está cheio pela metade pesa 19 kg. O peso do barril vazio é:

◯ (a) 16 kg

◯ (b) 7 kg

◯ (c) 8 kg

◯ (d) 19 kg

◯ (e) 3 kg

Solução A resposta correta é a alternativa e.

Como o barril de vinho cheio pesa 35 kg e cheio pela metade pesa 19 kg, temos que o peso da metade do vinho no barril cheio pesa $35-19=16$ kg. Isso significa que o peso total do vinho no barril cheio é igual a $16+16=32$ kg. Portanto, o peso do barril vazio é $35-32=3$ kg.

3. Camila é muito paciente e está escrevendo, por extenso, o número 1000^{1000}. Quando terminar ela terá escrito uma quantidade de algarismos igual a:

◯ (a) 3001

◯ (b) 100

◯ (c) 1000001

◯ (d) 1001

◯ (e) 1004

Solução

A resposta correta é a alternatica (a).
Para ver isso, note que:

$$
\begin{array}{l}
1000^1 = 10^3 = 1.000 \text{ possui 4 algarismos} \\
1000^2 = (10^2)^3 = 10^6 = 1.000.000 \text{ possui 7 algarismos} \\
1000^3 = (10^3)^3 = 10^9 = 1.000.000.000 \text{ possui 10 algarismos} \\
1000^4 = (10^3)^4 = 10^{12} = 100.000.000.000 \text{ possui 13 algarismos} \\
\vdots \\
1000^{10} = (10^3)^3 = 10^{30} \text{ possui 31 algarismos} \\
\vdots \\
1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3000} \text{ possui 3001 algarismos}
\end{array}
$$

4. Paulinho percorreu 300 km com sua bicicleta. No seu percurso, ele utilizou três pneus e cada um deles foi usado em igual distância.
A quantidade de kilômetros percorrida por cada pneu foi:

◯ (a) 75 km

◯ (b) 100 km

◯ (c) 150 km

◯ (d) 200 km

◯ (e) 60 km

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Sejam P_1, P_2 e P_3 os três pneus. Como a bicicleta roda com exatamente dois pneus, no percurso total Paulinho usou os pneus das três formas possíveis:

$$P_1 \text{ e } P_2, \; P_1 \text{ e } P_3, \; P_2 \text{ e} P_3.$$

Como Paulinho usou cada um dos pneus em igual distância, segue que cada dupla possível de pneus rodou 100 km. Ora, cada um dos pneus rodou exatamente duas vezes, o que implica que a quantidade de kilômetros percorrida por cada pneu foi de $100 + 100 = 200$ km.

5. João escreveu numa folha os números inteiros de 1 até 10.000, da seguinte forma:

$$123456789101112\ldots9998999910000$$

A quantidade de vezes que aparece a sequencia "2017" na folha é:

◯ (a) 3

◯ (b) 4

◯ (c) 5

◯ (d) 6

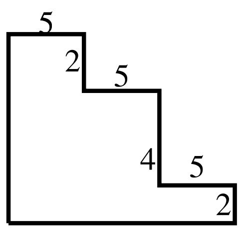
◯ (e) 7

Solução

A resposta correta é a alternatica (a).
Apenas 3 vezes, a saber:

- Em $\ldots 201620172018\ldots$.
- Em $\ldots 17201721\ldots$.
- Em $\ldots 72017202\ldots$.

6. Na figura a seguir, todos os ângulos são retos.



O perímetro da figura é igual a:

◯ (a) 21

◯ (b) 34

◯ (c) 42

◯ (d) 38

◯ (e) 46

Solução

A resposta correta é a alternativa (e).
Basta somar $2 \cdot 8 + 2 \cdot 15 = 16 + 30 = 46$.

7. Uma mosca possui 6 patas e sabe-se que uma aranha possui 8 patas. Juntas, 3 moscas e 6 aranhas possuem tantas patas quanto 13 pássaros e:
   - ◯ (a) 6 gatos
   - ◯ (b) 7 gatos
   - ◯ (c) 8 gatos
   - ◯ (d) 9 gatos
   - ◯ (e) 10 gatos

Solução

A resposta correta é alternatica (e).

Temos que 3 moscas possuem juntas $3 \cdot 6 = 18$ patas e 6 aranhas possuem juntas $6 \cdot 8 = 48$ patas. Assim, juntas, 3 moscas e 6 aranhas possuem $18 + 48 = 66$ patas. Por outro lado, 13 pássaros possuem juntos $13 \cdot 2 = 26$ patas. Como $66 - 26 = 40$ e cada gato possui 4 patas, podemos concluir que juntas, 3 moscas e 6 aranhas possuem tantas patas quanto 13 pássaros e 10 gatos.

8. O produto de dois números naturais é igual a 600.000. O maior valor do MDC entre eles é:
   - ◯ (a) 200
   - ◯ (b) 144
   - ◯ (c) 100
   - ◯ (d) 64
   - ◯ (e) 56

Solução

A resposta correta é a alternatica (a).
Temos que:

$$600.000 = 6 \cdot 10^6 = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^5 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^5.$$

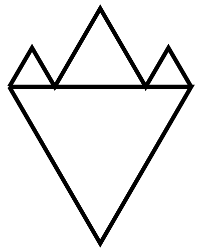
Se a e b são dois divisores positivos de 600.000, segue que eles são da forma

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \text{ e } b = 2^t \cdot 3^r \cdot 5^s,$$

com $x, t \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$; $y, r \in \{0,1\}$ e $z, s \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Para encontrarmos o $MDC(a,b)$, tomamos os fatores comuns de a e b elevados aos menores expoentes. Note que o 3 não pode ser fator comum a a e b pois na decomposição de 600.000 em fatores primos só existe um único 3, não podendo então esse único 3 aparecer nos dois divisores a e b. Assim, a e b são da forma $a = 2^x \cdot 5^z$ e $b = 2^t \cdot 5^s$, com $x, t \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ e $z, s \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Ora, como queremos que o $MDC(a, b)$ seja o maior possível, devemos escolher x, z, t, s tais que maximizar $\min\{x, t\}$ e $\min\{z, s\}$, o que ocorre, por exemplo (essa escolha não é única), se escolhermos $x = t = 3$ e $y = 2$ e $z = 3$, resultando que $a = 2^3 \cdot 5^2$ e $b = 2^2 \cdot 5^3$, o que revela que o maor valor possível para o $MDC(a, b) = 2^3 \cdot 52 = 200$.

9. A figura a seguir é formada por 4 triângulos equiláteros: 1 maior, 1 médio e 2 pequenos congruentes.



O comprimento do lado do maior triângulo é igual a duas vezes o comprimento do lado do triângulo médio. O comprimento do lado do triângulo médio é igual a duas vezes o comprimento do lado de um triângulo pequeno.
Sabendo que o perímetro do triângulo médio é igual da figura a 36 cm, a soma dos perímetros dos 4 triângulos da figura é:

- ◯ (a) 108
- ◯ (b) 72
- ◯ (c) 144
- ◯ (d) 78
- ◯ (e) 120

Solução

A resposta correta é a alternativa (e).

Chamando de p, m e g respectivamente, os comprimentos dos lados do triângulo pequeno, do triângulo médio e do triângulo maior, podemos escrever que:

$$g = 2 \cdot m, \qquad m = 2 \cdot p \qquad 3 \cdot m = 36.$$

Assim, temos que $m = 12$, $g = 2 \cdot 12 = 24$ e $12 = 2 \cdot p \Rightarrow p = 6$.
Por outro lado, observando a figura, temos que seu perímetro é

$$3g + 2p + 2m + 2p = 3 \cdot 24 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 6 = 72 + 12 + 24 + 12 = 120.$$

10. Paulo inventou um sistema de classificação dos seus livros que resulta, para cada um deles, número de 50 dígitos composto somente pelos dígitos 3 e 5.
A quantidade de somas diferentes que é possível obter se somarmos os dígitos de qualquer número desse tipo é:

- ◯ (a) 51
- ◯ (b) 100
- ◯ (c) 250
- ◯ (d) 360

◯ (e) 480

Solução

A resposta correta é a alternatica (a).
Veja a tabela abaixo:

Quatidade de 5	Quantidade de 3	Soma dos dígitos
0	50	$0.5+50.3$
1	49	$1.5+49.3$
2	48	$2.5+48.3$
	$\vdots$	
50	0	$50.5+0.3$

Note que todas as possíveis somas são da forma $x.5+(50-x).3=2x+150$, para $x=0, 1, 2, \ldots, 50$, o que revela que todas as somas são distintas e portando existem 51 somas possíveis.

11. Qualquer traço feito com uma determinada caneta tem a espessura de $0,4$ mm e você pode traçar até um quilômetro antes que a tinta acabe. A área do maior quadrado que você pode traçar com esta caneta e pintar sua área, fazendo tracos equivalentes ao lado do quadrado, até a tinta acabar é:

◯ (a) $4.000\ m^2$
◯ (b) $400\ m^2$
◯ (c) $40\ m^2$
◯ (d) $4\ m^2$
◯ (e) $0,4\ m^2$

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Seja x o comprimento do lado do quadrado que você pode traçar com a caneta e pintar sua área até a tinta acabar. Como o traço feito pela caneta tem espessura de $0,4$ mm, você vai pode traçar q traços horizontais, preenchendo todo área do quadrado espessura. Como x é o comprimento do lado do quadrado, temos que $q \cdot 0,4 = x$. Ou seja, $q = \frac{x}{0,4} = \frac{x}{0,0004}$ m. Por outro lado, ao preenchermos a área do quadrado teremos traçado um total de 1 km. Isto significa que

$$q \cdot x = 1km \Leftrightarrow \frac{x}{0,0004} \cdot x = 1000\ m \Leftrightarrow x^2 = 0,0004 \cdot 1000 = 4\ m^2.$$

12. Camila escreveu em uma tabela de cinco colunas todos os números inteiros positivos de 1 a 100, veja na figura a seguir parte da tabela.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Rodrigo, seu irmão, cortou em partes a tabela e apagou alguns números.
A figura recortada que pode ser parte da tabela escrita por Camila é:

◯ (a)

	43			
		48		

◯ (b)

		58		
	52			

◯ (c)

			69	
	72			

◯ (d)

	81			
	86			

◯ (e)

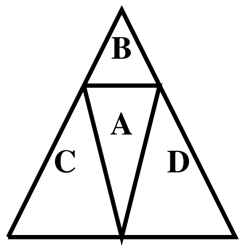
	90			
			94	

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).

Observe que cada número escrito na tabela é 5 unidades menor do que o número escrito imediatamente abaixo dele. Esta observação permite-nos concluir que as alternativas (a), (b) e (e) não são corretas. Além disso, a alternativa (d) não pode ser correta, pois todos os números da **segunda coluna** deixam resto 2 na divisão por 5, o que não ocorre com os números 81 e 86. Portanto, a única alternativa correta é a (c), que realmente corresponde as linhas 14 (com os números 66, 67, 68, 69, 70) e 15 (com os números 71, 72, 73, 74, 75).

13. Na figura a seguir, existem quatro triângulos: A, B, C e D.



Dois dos triângulos serão pintados de vermelho e dois dos triângulos serão pintados de azul. As pinturas serão feitas de modo que os dois triângulos pintados de azul possuam um lado em comum.
A quantidade de pinturas possíveis é igual a:

◯ (a) 2
◯ (b) 3
◯ (c) 4
◯ (d) 5
◯ (e) 6

Solução

A resposta correta é a alternatica (b).

Para que dois triângulos pintados de azul tenham um lado em comum, o triângulo central, chamado de A, tem de ser pintado de azul. O outro triângulo pintado de azul poderia ser B, C ou D. Logo, existem 3 maneiras distintas de pintar os triângulos.

14. Um relógio digital marca as horas de $00:00$ até $23:59$. Por um defeito, o relógio marca o dígito 8 como se fosse o 2. Por exemplo, em lugar de mostrar $18:48$, o relógio mostra $12:42$. Durante um dia, a quantidade de vezes que o relógio mostra as horas incorretamente é:

- ◯ (a) 120
- ◯ (b) 132
- ◯ (c) 252
- ◯ (d) 1440
- ◯ (e) 1188

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).

É fácil ver que o relógio marcará uma hora incorretamente sempre que a hora correta tiver pelo menos um dígito 8. Logo, a quantidade de horas incorretas pode ser calculadas da seguinte maneira:
(Quantidade total de horas incorretas) = (Quantidade total de horas) - (Quantidade de horas que não contém o dígito 8)

Cálculo do total de horas que o relógio marca

As 24 horas são marcadas nas seguintes possibilidades: 00, 01, 02, $\ldots$, 23. Para os minutos temos as 60 possibilidades seguintes: 00, 01, 02, $\ldots$, 58, 59. Portanto, temos um total de $24 \times 60 = 1440$ possibilidades.

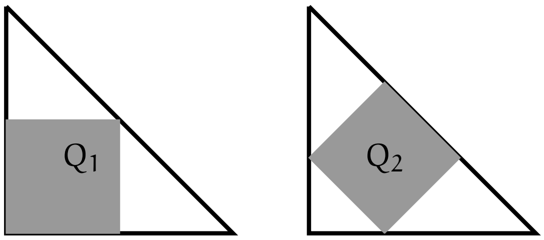
Cálculo do total de horas que não contém o dígito 8

Dentre as 24 horas, temos duas possibilidades onde o dígito 8 comparece: 08 e 18 horas. Para os minutos, temos as seguintes 6 possibilidades: 08, 18, 28, 38, 48 e 58. Logo, a quantidade de horas que o relógio marca sem qualquer dígito 8 é igual a

$$(24-2) \times (60-6) = 22 \times 54 = 1188.$$

Portanto, temos que: (Quantidade total de horas incorretas) = (1440) - (1188)=252

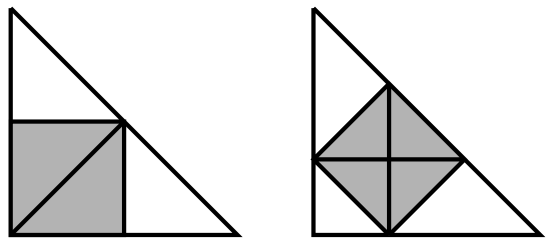
15. Inscrevem-se num mesmo triângulo retângulo isósceles, de área S, dois quadrados: Q_1 e Q_2, veja figura a seguir.



Se $S(Q_1)$ e $S(Q_2)$ são as áreas de Q_1 e Q_2, respectivamente, então:

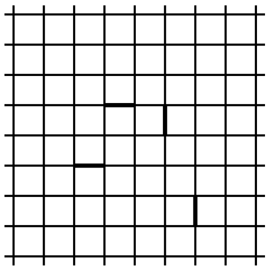
- ◯ (a) $S(Q_1) = S(Q_2)$
- ◯ (b) $S = S(Q_1) + S(Q_2)$
- ◯ (c) $S(Q_1) < S(Q_2)$
- ◯ (d) $S(Q_1) > S(Q_2)$
- ◯ (e) $S = S(Q_1) \times S(Q_2)$

Solução



A resposta correta é a alternativa (d).
O desenho acima deixa claro que a área $S(Q_1)$ é igual a $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ da área do triângulo dado e que a área $S(Q_2)$ é igual a $\frac{4}{9}$ da área do triângulo dado. Portanto, $S(Q_1) > S(Q_2)$.

16. Uma formiga caminha ao longo das retas de uma grade, veja figura a seguir.

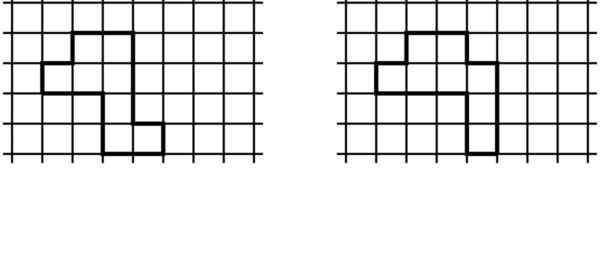


Ela começa sua jornada em um ponto P na grade, para onde retorna ao final de seu passeio. No seu trajeto, além do ponto P, a formiga não visita duas vezes qualquer outro ponto da grade. O caminho deve incluir os quatro segmentos destacados na figura.
O menor menor número possível de casas da grade que são delimitadas pela trajetória da formiga é:

- ◯ (a) 8
- ◯ (b) 9
- ◯ (c) 10
- ◯ (d) 11
- ◯ (e) 13

Solução
A resposta correta é a alternatica (a).

As seguintes figuras mostram como fazer.



17. O último dígito (contado da esquerda para direita) quando um número é escrito por extenso na base 10 é chamado de **algarismo das unidades**. Assim, por exemplo, o algarismo das unidades do número 2017 é o 7.
O algarismo das unidades do número $9^{2016}+9^{2017}$ é igual a
   - ◯ (a) 9
   - ◯ (b) 6
   - ◯ (c) 0
   - ◯ (d) 3
   - ◯ (e) 2

Solução
A resposta correta é altyernativa (c).

Podemos escrever:

$$9^{2016}+9^{2017}=9^{2016}+9.9^{2016}=9^{2016}(1+9)=9^{9016}\cdot 10,$$

o que revela que o número $9^{2016}+9^{2017}$ é múltiplo de 10 e, portanto, o seu algarismo das unidades é 0.

18. Se a média aritmética de 15 inteiros positivos distintos é 2017, o valor máximo possível que pode ter o terceiro maior desses números é:
   - ◯ (a) 10255
   - ◯ (b) 30177
   - ◯ (c) 10059
   - ◯ (d) 30178
   - ◯ (e) 10058

Solução
A resposta correta é a alternativa (e).

Sejam $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{15}$ os números inteiros positivos, ordenados do menor para o maior. Como a média aritmética deles é 2017, temos

$$\frac{n_1+n_2+\ldots+n_{15}}{15}=2017 \Leftrightarrow n_1+n_2+\ldots+n_{15}=15\times 2017=30255.$$

O terceiro maior possível dos 15 números, o n_{13}, só ocorre quando a soma dos 12 primeiros números for a menor possível. Assim, temos necessariamente que:

$$n_1+n_2+\ldots+n_{12}\geq\ (1+2+3+\ldots+12)=\frac{12\times 13}{2}=78.$$

Por outro lado, temos que

$$n_1+n_2+\ldots+n_{12}=30255-(n_{13}+n_{14}+n_{15})\geq 78 \Rightarrow n_{13}+n_{14}+n_{15}\leq(30255-78)=30177.$$

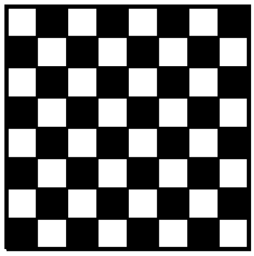
É fácil ver que

$$n_{13}+n_{14}+n_{15}\geq(n_{13}+n_{13}+n_{13})=3n_{13}\Rightarrow\ 3n_{13}\leq 30177\Rightarrow n_{13}\leq 10059.$$

(OBS. Tomando $n_{13}=10058<10059$, verificamos que $78+10058+10059+10060=30255$, o que satisfaz ao problema.)

19. Divide-se um tabuleiro de xadrez 8×8 com 64 casas quadradas de lado 1, veja figura a seguir, em K retângulos que não se sobrepõem, de acordo com a seguintes condições:

- Cada retângulo é formado por casas do tabuleiro.
- Cada retângulo possui a mesma quantidade de casas brancas e pretas.
- Não existem dois retângulos que posuam a mesma quantidade de casas do tabuleiro.



O maior valor posível para K é:

◯ (a) 5

◯ (b) 6

◯ (c) 7

◯ (d) 8

◯ (e) 9

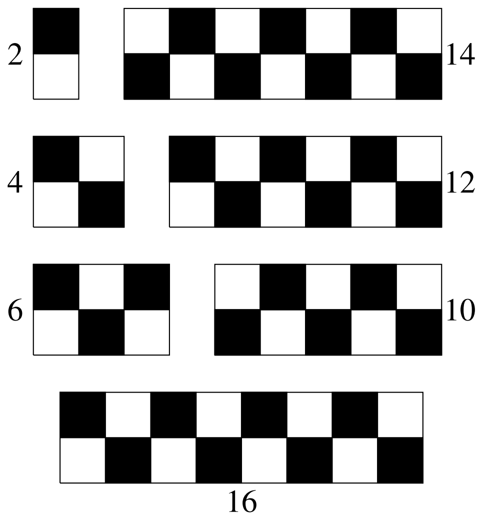
Solução

A resposta correta é a alternativa (c).

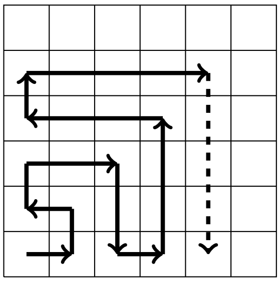
Pela segunda condição, podemos observar que as possíveis áreas dos K retângulos devem ser números pares e pela terceira condição todos esses números pares devem ser distintos. Seja S a soma das áreas dos K retângulos. Temos que S deve ser maior do que ou igual a soma dos primeiros K números positivos pares e que S é menor do que ou igual a 64, pois a quantidade de casas do tabuleiro dado é igual a 64. Isto é, temos:

$$2+4+6+\ldots+2K \leq 64 \Leftrightarrow \frac{K \cdot (2K+2)}{2} \leq 64 \Leftrightarrow K(K+1) \leq 64 \Leftrightarrow K \leq 7.$$

Portanto, o maior valor de K é 7. É fácil ver que, de fato, podemos dividir o tabuleiro dado em 7 retângulos nas condições o problema, veja a figura a seguir.



20. Linda começa a percorrer as casas de um grande tabuleiro (o tabuleiro é muito maior do que o mostrado abaixo) e, na medida que vai passando por cada casa, escreve um número natural nela. Ela começa no canto inferior esquerdo e escreve os números usando a seguinte organização:



17	18	$\cdots$	$\cdots$		
16	15	14	13		
5	6	7	12		
4	3	8	11		
1	2	9	10		

(O percurso ao longo do tabuleiro é mostrado na figura à esquerda e a colocação dos números nas casas ao longo do percurso é mostrado à direita).
Identificamos cada casa usando coordenadas (a,b), onde a é o número da coluna onde a casa se encontra, e b é o número da linha. Por exemplo, a casa na qual está escrito o número 2 é representada por $(2,1)$: segunda coluna e primeira linha; casa na qual está escrito o número 7 é representada por $(3,3)$: terceira coluna e terceira linha. As coordenadas da casa que contém o número 2017 são:

- ◯ (a) $(2017,2016)$
- ◯ (b) $(45,9)$
- ◯ (c) $(2016,2017)$
- ◯ (d) $(45,8)$
- ◯ (e) $(45,7)$

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).

Observe que os quadrados dos números inteiros pares estão escritos na primeira coluna e os quadrados dos números inteiros ímpares estão escritos na primeira linha. Além disso, é fácil ver que cada número inteiro que é quadrado perfeito está escrito numa casa que forma um quadrado com outras casas, incluindo a casa cujo número nela escrita é o número 1. Por exemplo, os números 16 e 9 estão escritos nos quadrados desenhados a seguir.

16	15	14	13
5	6	7	12
4	3	8	11
1	2	9	10

5	6	7
4	3	8
1	2	9

Observe também que, o número $9 = 3^2$ está na casa cujas coordenadas são $(3,1)$, que pertencem a um quadrado de lado medindo 3. De modo análogo, o número $16 = 4^2$ está na casa cujas coordenadas são $(1,4)$, que pertencem a um quadrado de lado medindo 4. Assim, basta procurar o quadrado mais próximo de 2017, que é $45^2 = 2025$. Como $2017 = 2025 - 8$, o número 2017 está escrito na interseção da coluna 45 com a linha 8. Ou seja, as coordenadas da casa que contém o número 2017 são $(45,8)$.