XXVIII OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO RIO GRANDE DO NORTE 2017- PRIMEIRA FASE SOLUÇÃO DA PROVA DO NÍVEL II

PARA CADA QUESTÃO, ASSINALE **UMA** ALTERNATIVA COMO A RESPOSTA CORRETA

NOME DO(A) ESTUDANTE: ______________________________
ESCOLA: ______________________________

1. Sandra está brincando com a sua calculadora. Ela introduz o número 12 e em seguida faz 60 operações. Cada uma dessas operações consiste em multiplicar ou dividir, por 2 ou por 3, o número que está no visor da calculadora, de maneira que obtenha sempre um número inteiro. O número que Sandra, com certeza, não pode obter é:

   - ◯ (a) 100
   - ◯ (b) 108
   - ◯ (c) 81
   - ◯ (d) 36
   - ◯ (e) 48

   Solução

   A resposta correta é a alternativa (a)
   Como o número 12 só possui os fatores primos 2 e 3, pois $12 = 2^2.3^1$, e vamos multiplicar ou dividir por fatores 2 ou 3, segue que o resultado final só pode apresentar fatores 2 ou 3 na sua decomposição em fatores primos. Ora, como $100 = 2^2.5^2$, com certeza esse número não pode ser obtido por Sandra, visto que ele possui o fator 5.

2. A distância de 8 km é aproximadamente igual a 5 milhas. A distância mais próxima de $1,2$ km é:

   - ◯ (a) $0,75$ milhas
   - ◯ (b) 1 milha
   - ◯ (c) $1,2$ milhas
   - ◯ (d) $1,6$ milhas
   - ◯ (e) $1,9$ milhas

   Solução

   A resposta correta é a alternativa (a) milhas
   Como 8 km é aproximadamente igual a 5 milhas, temos que 1 km é aproximadamnete igual $\frac{5}{8}$ milhas. Portanto, $1,2$ milhas é aproximadamente igual a

$$1,2 \times \frac{5}{8} = \frac{1,2 \times 5}{8} = \frac{6}{8} = 0,75 \text{ milhas}.$$

3. Cada letra na palavra **BENJAMIM** representa um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7. Letras diferentes representam dígitos diferentes e o número representado pela palavra **BENJAMIM** é ímpar e divisível por 3. A letra M representa o dígito:

   - (a) 1
   - (b) 2
   - (c) 3
   - (d) 5
   - (e) 7

   Solução

   A resposta correta é a alternativa (d).
   Como o número procurado é ímpar, segue que o seu último dígito, que está sendo representado pela letra M tem que ser ímpar. Assim, $M \in \{1,3,5,7\}$. Por outro lado, sabemos que um número é divisível por 3 se a soma dos seus dígitos for divisível por 3. Ora, como $1+2+3+4+5+6+7=28$ que não é divisível por 3 e o dígito correspondente ao M será o único repetido (pois letras diferentes representam dígitos diferentes e a letra M é a única letra repetida), segue que entre as possibilidades disponíveis a única que torna $28+M$ divisível por 3 é $M=5$.

4. A expressão

$$S = 1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\ldots+997^2-998^2-999^2+1000^2$$

   é igual a:

   - (a) 504
   - (b) 1000
   - (c) 1008
   - (d) 2016
   - (e) 2017

   Solução

   A resposta correta é a alternativa (b).
   Note que

$$\begin{aligned}(n-3)^2-(n-2)^2-(n-1)^2+n^2 &= \left[(n-3)^2-(n-1)^2\right]+\left[n^2-(n-2)^2\right]\\ &= (n-3+n-1)(n-3-(n-1)+(n+n-2))(n-(n-2))\\ &= (2n-4)\cdot(-2)+(2n-2)\cdot 2\\ &= -4n+8+4n-4\\ &= 4\end{aligned}$$

   Como $S = 1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\ldots+997^2-998^2-999^2+1000^2$ possui 1000 parcelas que podem ser agrupadas em grupos de 4 parcelas da forma $(n-3)^2-(n-2)^2-(n-1)^2+n^2=4$, segue que $S=250\cdot 4=1000$.

5. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tais que os lados AB, BC, CD e DA medem, respectivamente 4, 9, 6 e 11cm. Se E e F são os pontos médios de AB e CD, respectivamente, e a medida da área do quadrilátero $BEDF$ é de $18cm^2$.
Podemos afirmar que a medida da área do quadrilátero $ABDC$, em cm^2 é igual a:
   - ◯ (a) 24
   - ◯ (b) 27
   - ◯ (c) 36
   - ◯ (d) 48
   - ◯ (e) 54

Solução

A resposta correta é a alternativa (c)
Trace a diagonal BD e perceba que os triângulos ADE e BDE tem a mesma área (pois tem a mesma base e a mesma altura). Os triângulos CBF e DBF também tem a mesma área (pois tem a mesma base e a mesma altura). Sendo a área do $\Delta BDE = x$, isto é, $(BDE) = x$ e $(DBF) = y$, segue que $x+y = (BDE)+(DBF) = (BEDF) = 18$. Assim, $(ADE) = (BDF) = x$ e $(CBF) = (DBF) = y$. Por fim,

$$(ABCD) = (ADE)+(BDE)+(CBF)+(DBF) = x+x+y+y = 2(x+y) = 2.18 = 36\ cm^2.$$

6. No tabuleiro mostrado a seguir, continuamos escrevendo os inteiros positivos de acordo com a regra seguinte: Se em uma linha estão escritos os números $(a,\ b,\ c)$, então na linha seguinte se escrevem os números $(b+1,\ c+1,\ a+1)$. Na primeira linha estão escritos os números $(1,\ 2,\ 3)$ e para as outras linhas se aplica a regra mencionada.

Linha 1 →	1	2	3
Linha 2 →	3	4	2
Linha 3 →	5	3	4
⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮

O número que deve ser escrito na casa central da linha 2017 é:
   - ◯ (a) 2019
   - ◯ (b) 2015
   - ◯ (c) 2010
   - ◯ (d) 2017
   - ◯ (e) 2018

Solução

A resposta correta é a alternativaé (e)
Suponha que na fila de número n estejam escritos os números $(a,\ b,\ c)$, então, aplicando a regra teremos que os números nas linhas $n,\ n+1,\ n+2$ são:

Linha $n+1 \rightarrow$	$b+1$	$c+1$	$a+1$
Linha $n+2 \rightarrow$	$c+2$	$a+2$	$b+2$
Linha $n+3 \rightarrow$	$a+3$	$b+3$	$c+3$
$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Logo, podemos concluir que, se na linha n estão escritos os números $(a,\ b,\ c)$, segue que na linha $n+3$ estão escritos os números $(a+3,\ b+3,\ c+3)$. Agora, repetindo esse mesmo argumento várias vezes, veremos que na fila de número $n+3k$ aparecerão os números

$$(a+3k,\ b+3k,\ c+3k).$$

Como $2017 = 3\times 762+1$, tomando $a=1,\ b=2,\ c=3,\ n=1$ e $k=627$, segue que a linha $n+3k = 1+3x672 = 2017$ possui os números:

$$(1+3\times 672,\ 2+3\times 672,\ 3+3\times 672) = (2017, 2018, 2019).$$

Portanto, o número que deve ser escrito na casa central da linha 2017 é 2018.

7. Sabendo que $|x| = x,\ se\ x \geq 0,\ e\ |x| = -x,\ se\ x < 0,$ então a quantidade de raízes inteiras da equação $x^2 - 2|x| = 2$ é:

   - ◯ (a) 0
   - ◯ (b) 1
   - ◯ (c) 2
   - ◯ (d) 3
   - ◯ (e) 4

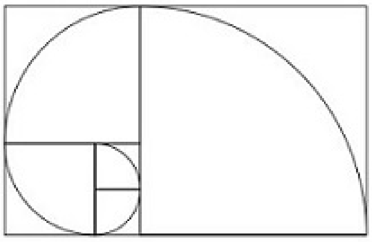
Solução

A resposta correta é a alternativa (a).
Suponha que o número inteiro a seja raiz da equação dada. Assim, temos que

$$a^2 - 2|a| = 2 \ \Rightarrow\ a^2 = 2|a|+2 \Leftrightarrow\ a^2 = 2(|a|+1).$$

Logo, o número inteiro a^2 é um número par, o que implica que a é um número par. Assim, os dois números a^2 e $2|a|$ são múltiplos de 4 e a diferença deles é igual a 2, o que é uma contradição. Portanto, a não pode ser inteiro.

8. Cinco quadrados justapostos formam a logomarca da SBM-Sociedade Brasileira de Matemática. Dentro de cada quadrado é construído um quarto de círculo, como ilustra a figura a seguir:



Se cada um dos quadrados menores tem lados medindo $1,0\mathrm{cm}$, podemos afirmar que o comprimento total da curva em espiral é:

◯ (a) 3π

◯ (b) 6π

◯ (c) 9π

◯ (d) 10π

◯ (e) 13π

Solução

A resposta correta é a alternativa (b).
O comprimento de um círculo de raio r é $2\pi r$. Nos quadrados menores há dois quartos de círculos da raio $1,0\ \mathrm{cm}$ e nos demais quadrados um quarto de círculo de raios $2,0\ \mathrm{cm}$, $3,0\ \mathrm{cm}$ e $5,0\ \mathrm{cm}$. Assim o comprimento total da curva em espiral é

$$C = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 5 = 6\pi.$$

9. Um grupo de oito pessoas pediu uma pizza (circular). O garçom conseguiu dividi-la em oito pedaços fazendo apenas cortes retos. O número mínimo de cortes para que o garçon possa dividir a pizza em oito pedaços é

◯ (a) 3

◯ (b) 4

◯ (c) 5

◯ (d) 6

◯ (e) 8

Solução

A resposta correta é a alternativa (a)
Pode-se cortar a pizza através de um diâmetro. Põe-se cada uma das metades sobre a outra e então corta-se mais uma vez ao meio, gerando quatro quadrantes. Por fim põe-se os quatro quadrantes sobrepostos uns sobre os outros e faz-se mais um corte ao meio, obtendo-se então oito pedaços (todos iguais).

10. O maior número de garrafas de refrigerante que não podem ser entregues em caixas lacradas de 6, 15 e 10 garrafas é:

○ (a) 29

○ (b) 31

○ (c) 69

○ (d) 87

○ (e) 91

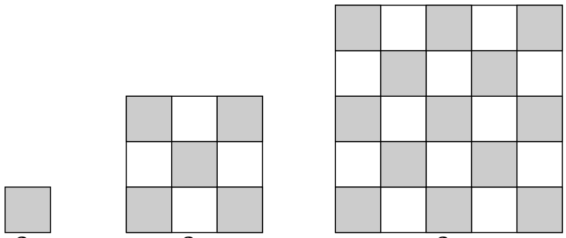
Solução

A resposta correta é a alternativa (a).
Qualquer quantidade de refrigerantes que pode ser entregue é um número da forma $6x+15y+10z$, onde x, y e z são inteiros não negativos representando as quantidades de caixas de cada um dos três tipos mencionados no enunciado. O Menor Múltiplo Comum das três quantidades de caixas, o número $MMC(6,10,15)=30$, certamente representa uma quantidade de refrigerente que pode ser entregue, pois basta escolher $x=5$ ou $y=2$ ou ainda $z=3$.
Não podemos entregar a quantidade de 29 garrafas, pois como 29 é ímpar e tanto 6 quanto 10 são números pares, precisamos usar pelo menos uma caixa de 15 garrafas. Não podemos usar mais que uma porque 29 é menor que $2\cdot 15=30$. Isto nos força a entregar $29-15=14$ garrafas combinando caixas de 6 e 10. Como 14 não é múltiplo de 6, precisamos usar pelo menos uma caixa com 10. Como $2\cdot 10>14$, devemos usar exatamente uma caixa com 10. Isso nos obriga a entregar $14-10=4$ garrafas com caixas de 6. Isto é impossível. Notemos agora que existem 6 números consecutivos logo após 29, representando quantidades que podem ser entregues. Façamos então uma tabela com alguns números que podem representar quantidades entregues de refrigerantes.

x	y	z	$6x+15y+10z$
5	0	0	30
1	1	1	31
2	0	2	32
3	1	0	33
4	0	1	34
0	1	2	35

Seja n um inteiro maior que 29 e o dividamos por 6 obtendo $n=6q+r$, onde q é o quociente e $r\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ é o seu resto. Como $n>29$, devemos ter $q\geq 5$ e, consequentemente, podemos escrever $n=6(q-5)+30+r$. O número $6(q-5)$ representa claramente uma quantidade de garrafas que pode ser entregue apenas com caixas de 6 e o número $30+r$, por estar no conjunto $30, 31, 32, 33, 34, 35$, representa uma quantidade de garrafas que pode ser entregue com combinações das três caixas. Portanto, o número 29 é a maior quantidade de refrigerantes que não podem ser entregues.

11. A figura a seguir mostra uma sequência de modelos feitos de ladrilhos brancos e pretos, onde cada modelo depois do primeiro possui duas linhas e duas colunas a mais do que o modelo imediatamente anterior.



S_1 S_2 S_3 $\cdots$

A quantidade de mosaicos pretos necessários para formar o modelo 15 da sequência é igual a:

- ◯ (a) 401
- ◯ (b) 421
- ◯ (c) 441
- ◯ (d) 461
- ◯ (e) 481

Solução

A resposta correta é a alternativa (b)
Os termos da sequência de modelos são: $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Na tabela a seguir mostramos a sequência do número de mosaicos pretos quando variamos os modelos:

Modelo	Qte. Mosaicos Pretos	Parcelas por linha
S_1	1	1
S_2	5	$2+1+2$
S_3	13	$3+2+3+2+3$
S_4	25	$4+3+4+3+4+3+4$
S_5	41	$5+4+5+4+5+4+5+4+5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observe que, para obter a quantidade de mosaicos pretos na sequência dos modelos temos que somar uma quantidade de parcelas corespondentes: $1, 3, 5, 7, \ldots$. De forma que, para o modelo S_n temos $2n-1$ parcelas do tipo $n+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+n$. Deste modo, no modelo S_{15} o total de mosaicos pretos corresponderão à soma de $2.15-1=29$ parcelas, dadas por 28 parcelas $15+14$ mais uma parcela igual a 15:

$$(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+$$

$$+(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+(15+14)+15=14\cdot 29+15=306+15-421.$$

Portanto, a quantidade de mosaicos pretos necessários para formar o modelo 15 da sequência é igual a: 421.

12. Um rato corre em torno do exterior de um quadrado de lado medindo 2m, de modo que em todos os momentos se mantém exatamente a uma distância de 3 metros do ponto próximo a ele no contorno do quadrado. Em m^2, a área da região limitada por um circuito completo do rato é igual a:

- ◯ (a) 64
- ◯ (b) $20+\pi$

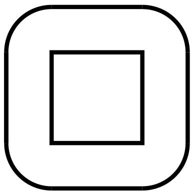
○ (c) $20+9\pi$

○ (d) $28+\pi$

○ (e) $28+9\pi$

Solução

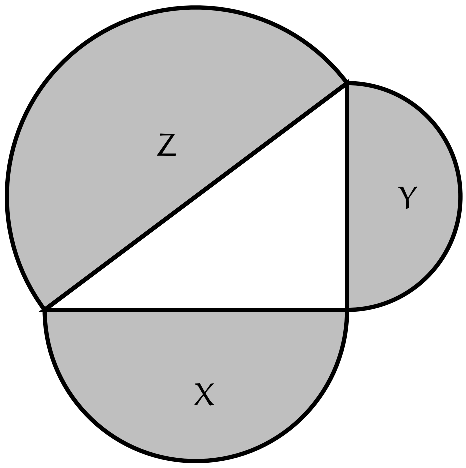
A resposta correta é a alternativa (e).
Observe que, para se manter exatamente a uma distância de 3 metros do ponto próximo a ele no contorno do quadrado de lado medindo 2m, o rato vai se deslocar ao longo de um "quadrado" de lado medindo 5, com vértices arredondados, veja figura a seguir.



Assim, a área da região limitada por um circuito completo do rato é igual a área de um retângulo com base medindo $3+2+3=8$ e altura 2, mais a área de dois retângulos congruentes de base medindo 2 e altura 3 mais a área limitada pelos quatro cantos arredondados, que é igual a área de um círculo de raio 3. Portanto, a área da região limitada por um circuito completo do rato é igual a

$$8\times 2+2\times 2\times 3+\pi\times 3^2=16+12+9\pi=28+9\pi.$$

13. Três semicírculos cujos diâmetros são os lados de um triângulo retângulo possuem áreas $X\,m^2$, $Y\,m^2$ e $Z\,m^2$, veja figura a seguir.



Assinale a afirmativa verdadeira.

○ (a) $X+2<Z$

○ (b) $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=3$

○ (c) $X+Y=2$

○ (d) $X^2+Y^2=Z^2$

○ (e) $X^2+Y^2=Z$

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Sejam a, b os comprimentos dos catetos do triângulo e c o comprimento da hipotenusa. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}$, obtemos

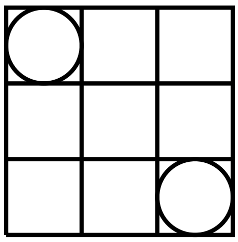
$$\frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Por outro lado, temos que

$$Z^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$
$$X^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ e}$$
$$Y^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

o que nos permite concluir que $X^2 + Y^2 = Z^2$.

14. Um tabuleiro 3×3 possui 9 casas quadradas de lado 1, e dois círculos são inscritos em duas delas, veja figura a seguir.

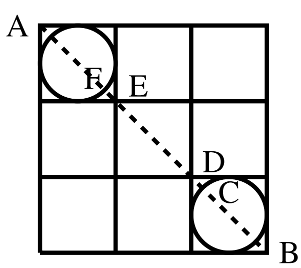


A distância entre os dois círculos é igual a

- ◯ (a) $2\sqrt{2}$
- ◯ (b) $\sqrt{2} - 1$
- ◯ (c) $2\sqrt{2}$
- ◯ (d) 2
- ◯ (e) 3

Solução

A resposta correta é a alternativa (b).
Como a distância entre dois pontos no plano é a menor das distância entre esses pontos, calculamos a distância entre os círculos ao longo da diagonal AB do tabuleiro, veja figura seguir.



Como cada casa do tabuleiro é um quadrado unitário, pelo Teorema de Pitágoras, a diagonal de cada casa mede $\sqrt{2}$. Logo, a diagonal DE mede $\sqrt{2}$. Sejam C e F, respectivamente, a interseção da diagonal AB com os círculos. Assim, a distância entre os dois círculos é igual a distância entre os pontos C e F:

$$d = \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF}.$$

Observe que $\overline{CD} = \overline{EF} = \frac{\overline{BD}}{2} -$ raio do círculo $= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$. Assim, temos que

$$d = \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}) + \sqrt{2} + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}) = 2\sqrt{2} - 1.$$

15. O número inteiro positivo K é o menor inteiro positivo que é múltiplo de 7, tendo a soma de seus dígitos um múltiplo de 7, mas nenhum de seus dígitos é 7. O dígito das unidades de K é:

    ◯ (a) 3
    ◯ (b) 4
    ◯ (c) 5
    ◯ (d) 6
    ◯ (e) 7

Solução

A resposta correta é a alternativa (a).
Inicialmente, olhemos para os números inteiros positivos com 1 dígito. Neste caso, o número 7 é o único múltiplo de 7, mas não satisfaz ao problema. Agora, consideremos os números inteiros positivos com 2 dígitos que satisfazem ao problema. Neste caso, esses números são da forma $10a + b$, onde a, b são dígitos e $a \neq 0$. Como, por hipótese, $a + b$ é um múltiplo de 7, temos que:

$$10a + b = 9a + (a + b) \Rightarrow 9a \text{ é um múltiplo de } 7\ a = 7.$$

Contradição, pois os dígitos do número K são distintos de 7. Logo, não existe número inteiro positivo com dois dígitos satisfazendo ao problema.
Vamos examinar o caso de inteiros positivos com 3 dígitos. Como os primeiros números inteiros positivos com 3 dígitos que são múltiplos de 7 são:

$$105, 112, 119, 126, 133, 140, \ldots,$$

temos que $K = 133$ e o dígito das unidades é 3.

16. Escrevem-se em cada uma das quatro faces de dois cartões um número, de tal maneira que os quatro números sejam distintos. Melissa lançou os cartões ao alto e quando caíram sobre a mesa observou que a soma dos números que ficaram visíveis era 36. Em seguida sua amigas Lúcia, Nathália e Lara repetiram o mesmo processo e obtiveram os resultado: 41, 50 e 55, respectivamente. Se os números de Lara foram

$$\boxed{25} \qquad \boxed{30}$$

a diferença entre os números que obteve Lúcia foi:

    ◯ (a) 36

- ◯ (b) 5
- ◯ (c) 50
- ◯ (d) 9
- ◯ (e) 41

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Sejam a, b os números que aparecem no verso de 25 e 30, respectivamente. Analisando todas as maneiras possíveis em que podem cair os cartões sobre a mesa, observamos que

$$a+b,\ \ a+30,\ \ e\ \ b+25 \text{ são iguais a } 36,\ 41 \text{ e } 50,$$

em alguma ordem. Somando esses números, obtemos:

$$2(a+b)+55 = 36+41+50 = 127 \ \Rightarrow\ a+b = 36.$$

Logo, temos que

$$a+30,\ \ e\ \ b+25 \text{ são iguais a } 41 \text{ e } 50,$$

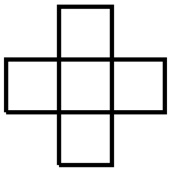
em alguma ordem.
Como $b+25$ não pode ser 50, pois $b \neq 25$, segue que $b+25 = 41$ e $a+30 = 50$, de onde concluímos que $b = 16$ e $a = 20$. Portanto, os números que Lúcia viu foram 25 e 16, cuja diferença é 9.

17. Maria tem n bolas de isopor de mesmo tamanho, cada uma delas ela pinta de azul ou vermelho, tendo pelos menos uma bola de cada cor. Depois de pintar as bolas, Maria as arruma em fila, de modo que quaisquer duas bolas entre as quais existam 10 ou 15 outras bolas, são de mesma cor. O maior valor possível para n é:
    - ◯ (a) 15
    - ◯ (b) 18
    - ◯ (c) 20
    - ◯ (d) 25
    - ◯ (e) 32

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Chamemos as bolas em sequência, da esquerda para direita, de $1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ n$. Vamos supor que a bola 11 seja vermelha. Como existem dez bolas entre a bola 11 e a bola 22, concluímos que a bola 22 tem de ser vermelha. Por outro lado, como existem quinze bolas entre a bola 6 e a bola 22, segue que a bola 6 é vermelha. Com o mesmo raciocínio, podemos concluir que as bolas 17, 1, 12, 23, 7, 18, 2, 13, 24, 8, 19, 3, 14, 25, 19, 20, 4 e a bola 15 são todas vermelhas. Se existem extamente vinte e cinco bolas, segue que as bolas 5, 10, 16 e 21 são azuis.
Se $n \geq 26$, segue que a bola 26 tem de ser vermelha, pois existem dez bolas entre as bolas 15 e 26. Logo, as bolas 10, 21, 5 e 16 tem de ser vermelhas. Ora, isto implica que todas as primeiras vinte e seis bolas serão vermelhas, o que implica que todas as restantes serão vermelhas. Contradição com a hipótese. Portanto, o número máximo de bola é 25.

18. Os números 1, 4, 7, 10 e 13 deve ser escritos na figura a seguir, um em cada casa quadrada, de modo que a soma dos três números na linha horizontal seja igual a soma dos três números na coluna vertical.

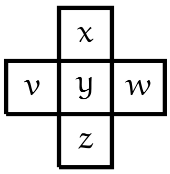


O maior valor possível para soma comum é:

- ◯ (a) 15
- ◯ (b) 21
- ◯ (c) 24
- ◯ (d) 30
- ◯ (e) 26

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Chamemos de x, y, z,v e w os números escritos nas casas, veja figura a seguir.



Como a soma dos três números na linha horizontal é igual a soma dos três números na coluna vertical, temos que:

$$x+y+z=u+y+w \Rightarrow x+z=u+w.$$

Agora, basta agrupar os números de modo as duas somas acima sejam iguais. É fácil ver que a soma será máxima se $x=10$, $y=13$, $z=1$, $v=4$ e $w=7$, com a soma comum sendo 24.
Observação: Os números poderiam ser $x=1$, $y=13$, $z=10$, $v=7$ e $w=4$, porém dando a soma máxima igual a 24.

19. Tem-se 48 laranjas divididas em três sacos. Do primeiro saco passamos ao segundo tantas laranjas quantas há neste saco. Em seguida, do segundo saco passamos para o terceiro tantas laranjas quantas estão neste último. Finalmente, do terceiro saco passamos para o primeiro tantas laranjas quantas existe agora no primeiro saco.
Se cada saco fica com a mesma quantidade de laranjas, a quantidade de laranjas que existia inicialmente no primeiro saco era:

- ◯ (a) 10
- ◯ (b) 12
- ◯ (c) 14
- ◯ (d) 22
- ◯ (e) 28

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Observe que, a cada momento do processo, o número de laranjas é sempre o mesmo: 48 laranjas. Se no final os três sacos possuem a mesma quantidade de laranjas, então cada um terminou com 16 laranjas:

Saco 1	Saco 2	Saco 3
16	16	16

Agora, raciocinamos de trás para frente. Como no terceiro procedimento o primeiro saco duplicou o número de laranjas, antes disso teria 8 laranjas e o terceiro saco teria de ter $16+8=24$, pois repassou 8 laranjas para o primeiro saco:

Saco 1	Saco 2	Saco 3
8	16	24

Como no segundo procedimento a quantidade de laranjas do terceiro saco se dupplica, a quantidade de laranja em cada saco eram:

Saco 1	Saco 2	Saco 3
8	28	12

Como no primeiro procedimento a quantidade de laranjas do segundo saco se duplica, inicialmente as quantidades de laranjas eram

Saco 1	Saco 2	Saco 3
22	14	12

Portanto, a quantidade de laranjas que existia inicialmente no primeiro saco era 22.

20. Considere o conjunto $A=\{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 2017\}$. Sabendo-se que $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, podemos concluir que a quantidade de subconjuntos de A tais que a soma de seus elementos seja 2035150 é:
    - ◯ (a) 0
    - ◯ (b) 2
    - ◯ (c) 3
    - ◯ (d) 1008
    - ◯ (e) 2014

Solução

A resposta correta é a alternativa (b). Observe que a soma de todos os elementos o conjunto A é igual a $\frac{2017\cdot 2018}{2}=2035153$.
Logo, para obtermos um subconjunto de A tal que a soma de seus elementos seja 2035150, basta retirar de A um ou vários elementos que somem 3. Agora, é fácil ver que só existem dois subconjuntos de A que tem a soma dos seus elementos igual a 3:

- Existe um subconjunto com um só elemento: $\{3\}$.
- Existe dois subconjuntos com dois elementos: $\{1, 2\}$.

Como existem dois subconjuntos de A cuja soma de seus elementos seja 3, podemos concluir que existem também dois subconjuntos de A cuja soma dos elementos seja 2035150.