XXVIII OLIMPÍADA DE MATEMATICA
DO RIO GRANDE DO NORTE 2017- PRIMEIRA FASE
SOLUÇÃO DA PROVA DO NÍVEL III

PARA CADA QUESTÃO, ASSINALE **UMA** ALTERNATIVA COMO A RESPOSTA CORRETA

NOME DO(A) ESTUDANTE: ______________________________

ESCOLA: ______________________________

1. Podemos afirmar que a expressão $\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}}$ é igual a:

   - (a) 2015
   - (b) 2016
   - (c) 2017
   - (d) 2018
   - (e) 2019

   Solução

   A resposta é alternativa (a).
   Sabe-se que $(x-1)(x+1)=x^2-1$, o que revela que $1+(x-1)(x+1)=x^2$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}} &= \sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{2017^2}}}\\
&= \sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\cdot 2017}}\\
&= \sqrt{1+2014\sqrt{2016^2}}\\
&= \sqrt{1+2014\cdot 2016}\\
&= \sqrt{2015^2}\\
&= 2015
\end{aligned}$$

2. O maior número de garrafas de refrigerante que não podem ser entregues em caixas lacradas de 6, 15 e 10 garrafas de refrigerante é:

   - (a) 31
   - (b) 91
   - (c) 69
   - (d) 87
   - (e) 29

Solução

A resposta é alternativa (e).
Qualquer quantidade de refrigerantes que pode ser entregue é um número da forma $6x+15y+10z$, onde x, y e z são inteiros não negativos representando as quantidades de caixas de cada um dos três tipos mencionados no enunciado. O Menor Múltiplo Comum das três quantidades de caixas, o número $MMC(6,10,15)=30$, certamente representa uma quantidade de refrigerente que pode ser entregue, pois basta escolher $x=5$ ou $y=2$ ou ainda $z=3$.

Não podemos entregar a quantidade de 29 garrafas, pois como 29 é ímpar e tanto 6 quanto 10 são números pares, precisamos usar pelo menos uma caixa de 15 garrafas. Não podemos usar mais que uma porque 29 é menor que $2\cdot 15=30$. Isto nos força a entregar $29-15=14$ garrafas combinando caixas de 6 e 10. Como 14 não é múltiplo de 6, precisamos usar pelo menos uma caixa com 10. Como $2\cdot 10>14$, devemos usar exatamente uma caixa com 10. Isso nos obriga a entregar $14-10=4$ garrafas com caixas de 6. Isto é impossível. Notemos agora que existem 6 números consecutivos logo após 29, representando quantidades que podem ser entregues. Façamos então uma tabela com alguns números que podem representar quantidades entregues de refrigerantes.

x	y	z	$6x+15y+10z$
5	0	0	30
1	1	1	31
2	0	2	32
3	1	0	33
4	0	1	34
0	1	2	35

Seja n um inteiro maior que 29 e o dividamos por 6 obtendo $n=6q+r$, onde q é o quociente e $r\in\{0,1,2,3,4,5\}$ é o resto da divisão. Como $n>29$, devemos ter $q\geq 5$ e, consequentemente, podemos escrever $n=6(q-5)+30+r$. O número $6(q-5)$ representa claramente uma quantidade de garrafas que pode ser entregue apenas com caixas de 6 e o número $30+r$, por estar no conjunto $30,31,32,33,34,35$, representa uma quantidade de garrafas que pode ser entregue com combinações das três caixas. Portanto, o número 29 é a maior quantidade de refrigerantes que não podem ser entregues.

3. No plano cartesiano, quando refletimos em torno da origem a parábola cuja equação seja $y=x^2-5x+6$, obtemos uma parábola cuja equação cartesiana é:
   - ◯ (a) $y=-x^2+5x-6$
   - ◯ (b) $y=-x^2-5x-6$
   - ◯ (c) $y=-x^2+5x+6$
   - ◯ (d) $y=x^2-5x+6$
   - ◯ (e) $y=x^2-5x-6$

Solução

A resposta correta é a alternativa (b).
No plano Cartesiano, ao fazermos uma reflexão do ponto P, de coordenadas (x,y), em torno da

origem, obtemos um ponto Q de coordenadas $(-x,-y)$. Assim, a equação da parábola que é a reflexão de $y=x^2-5x+6$ em torno da origem é:

$$-y=(-x)^2-5(-x)+6 \Rightarrow y=-x^2-5x-6.$$

4. Se numa sala existem 75 pessoas, o maior número natural k para o qual seja necessariamente verdadeira a seguinte afirmação:

"Existe um mês do ano em que pelo menos k dessas pessoas aniversariam".

é:

- ◯ (a) 9
- ◯ (b) 8
- ◯ (c) 13
- ◯ (d) 7
- ◯ (e) 10

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Ora, como um ano tem 12 meses e $75=12\cdot 6+3$, segue pelo Princípio da Casa dos Pombos, que existe um mês do ano onde pelo menos 7 das pessoas da sala fazem aniversário.

5. Seja $A=\left\{10^1+1,\ 10^2+1,\ \ldots,\ 10^{2017}+1\right\}$. Escolhendo-se aleatoriamente um elemento do conjunto A, podemos afirmar que a probabilidade de que ele não seja um número primo é maior do que ou igual a:

- ◯ (a) $\frac{1000}{2017}$
- ◯ (b) $\frac{1003}{2017}$
- ◯ (c) $\frac{1}{2017}$
- ◯ (d) $\frac{2007}{2017}$
- ◯ (e) $\frac{11}{2017}$

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Se n é um inteiro positivo que não é uma potência de 2, segue que n possui um fator ímpar s. Nesse caso, podemos escrever $n=rs$, com r um número inteiro positivo. Sob essas condições podemos escrever:

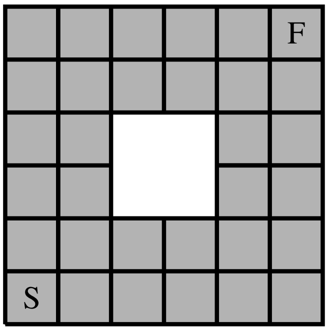
$$\begin{aligned} 10^n+1 &= 10^{rs}+1 \\ &= (10^r)^s+1^s \\ &= (10^r+1)(10^{r(s-1)}-10^{r(s-2)}+\cdots+1) \end{aligned}$$

O que revela que nos casos em que n não é uma potência de 2, o número 10^n+1 é composto (pois é o produto de dois fatores inteiros positivos diferentes de 1 e menores que ele). Ora, como as únicas potências de 2 maiores do que 1 e menores do que 2017 são 10, a saber:

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ldots,\ 2^{10}$$

concluímos então que de 1 até 2017 existem pelo menos 2007 números que não são primos (pois no caso em que n é uma potência de 2 não temos garantia se 10^n+1 é primo ou não) $2017-10=2007$ números inteiros positivos que não são potências de 2 e, portanto, na lista $10^1+1,\ 10^2+1,\ \ldots,\ 10^{2017}+1$ existem pelo menos 2007 números que não são primos. Portanto a probabilidade de sortearmos ao acaso um número do conjunto A e ele não ser primo é $P \geq \frac{2007}{2017}$.

6. O tabuleiro representado na figura abaixo possui 32 casas, uma das quais está assinalada com a letra S e outra com a letra F. O memor caminho para se deslocar de S para F envolve exatamente nove casas e dez movimentos, onde cada movimento só pode ocorrer "horizontalmente"ou "verticalmente"de uma casa para outra casa vizinha.



Desse forma, podemos afirmar que o número de caminhos distintos, respeitando as regras mencionadas anteriormente, é igual a:

◯ (a) 52

◯ (b) 48

◯ (c) 64

◯ (d) 36

◯ (e) 90

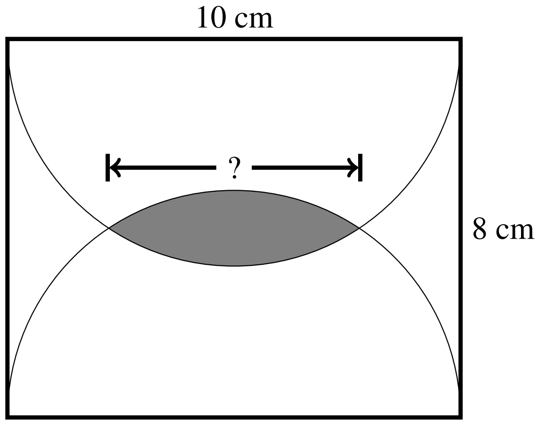
Solução

A resposta correta é a alternativa (a).

A figura abaixo mostra o número de possibilidades de se chegar a cada um dos quadrados do tabuleiro. (Note que o número presente num dos quadradinhos é igual a soma do número do quadradinho que está imediatamente abaixo dele e o outro que está à esquerda- semelhante ao que ocorre no conhecidissímo *Triângulo de Pascal*).

1	6	11	16	26	**52**
1	5	5	5	10	26
1	4			5	16
1	3			5	11
1	2	3	4	5	6
S	1	1	1	1	1

7. Dois semicírculos idênticos são construídos no interior de um retângulo como ilustra a figura abaixo:

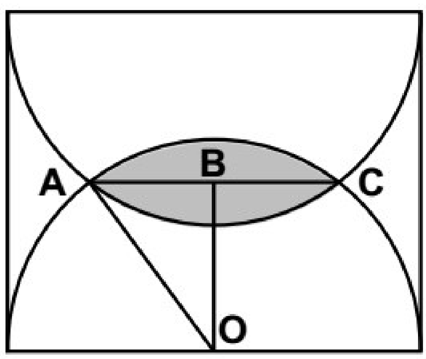


Podemos afirmar que a medida da corda comum aos dois círculos é:

- ◯ (a) $3{,}0\ \mathrm{cm}$
- ◯ (b) $4{,}0\ \mathrm{cm}$
- ◯ (c) $\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
- ◯ (d) $6{,}0\ \mathrm{cm}$
- ◯ (e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$

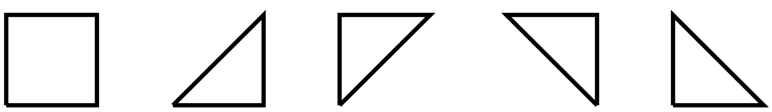
Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Seja $2x$ a medida da corda AC comum aos dois círculos. Ligue o ponto médio da base do retângulo (ponto O) com um dos pontos de interseção dos dois círculos (ponto A). Trace um segmento partindo do centro da base (ponto O) do retângulo até o ponto central da região de interseção dos dois círculos (ponto B), conforme ilustra a figura abaixo:



Temos assim um triângulo retângulo OAB de catetos x e 4 e de hipotenusa 5. Pelo Teorema de Pitágoras, temos $5^2 = x^2 + 4^2$, o que revela que $x = 3$ e, portanto, que o comprimento da corda comum aos dois círculos é de $6{,}0\ \mathrm{cm}$.

8. Lídia, unindo-se alguns vértices de um quadrado por segmentos de reta, pode formar quatro triângulos retângulos, conforme ilustra a figura a seguir:



Ligando por segmentos alguns dos vértices de um polígono regular de 18 lados, o maior número de triângulos retângulos que Lídia poderia formar é:

- ◯ (a) 156
- ◯ (b) 107
- ◯ (c) 949
- ◯ (d) 132
- ◯ (e) 144

Solução

A resposta correta é a alternativa (e).
Um polígono regular com 18 lados tem um círculo circunscrito, que é o mesmo círculo circunscrito a um dos possíveis triângulos retângulos cujos vértices também são vértices do polígono original. Para que um triângulo inscrito num círculo seja retângulo é preciso que um dos seus lados (a sua hipotenusa) seja o diâmetro do círculo. Nesse caso há 9 possibilidades para escolhermos um diâmetro. Escolhido o diâmetro há $18-2=16$ possibilidades de se escolher o terceiro vértice que irá compor o triângulo retângulo. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, segue que existem $9\times 16=144$ triângulos retângulos distintos.

9. Depois de uma pequena discussão, Débora, Marina e Lídia seguiram cada uma o seu caminho, em direções de $120°$ uma com a outra. Suas velocidades constantes estavam na razão $1:2:4$. Após a saída, em qualquer instante, suas posições são os vértices de um triângulo:

   - ◯ (a) acutângulo
   - ◯ (b) retângulo isósceles
   - ◯ (c) obtusângulo
   - ◯ (d) retângulo
   - ◯ (e) cujas medidas dos lados são proporcionais a 1, $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{3}$

   Solução

   A resposta correta é a alternativa (d).
   Sejam v, $2v$ e $4v$ as velocidades de Débora, Marina e Lídia, rescpectivamente. Como a distância percorrida com uma velocidade constante é proporcional à velocidade, segue que após um tempo t, as distâncias percorridas por Débora, Marina e Lídia, são d, $2d$ e $4d$, respectivamente.
   Sejam $d(D,M)$ a distância entre Débora e Marina; $d(D,L)$ a distância entre Débora e Lídia; $d(L,M)$ a distância entre Lídia e Marina. Como os ângulos entre quaisquer duas das três trajetórias é de $120°$, segue pela Lei dos Cossenos que:

   $$d^2(D,M)=d^2+(2d)^2-2.d.(2d).\cos 120°=7d^2$$

   $$d^2(D,L)=d^2+(4d)^2-2.d.(4d).\cos 120°=21d^2$$

   $$d^2(L,M)=(4d)^2+(2d)^2-2.(4d).(2d).\cos 120°=28d^2$$

   Assim, $d^2(L,M)=d^2(D,M)+d^2(D,L)$, o que revela que o triângulo cujos vértices são as posições ocupadas por Débora, Marina e Lídia são os vértices de um triângulo retângulo.

10. Em um determinado lago, a probabilidade de se pegar um peixe é uniforme e independente ao longo do tempo. Se a probabilidade de você pegar pelo menos um peixe em uma hora é de 64 %, a probabilidade de você pegar pelo menos um peixe em meia hora é:

- ◯ (a) 36%
- ◯ (b) 40%
- ◯ (c) 16%
- ◯ (d) 24%
- ◯ (e) 8%

Solução

A resposta correta é a alternativa (b).
Seja p a probabilidade de se pegar pelo menos um peixe em meia hora (que é o que você quer achar!). Assim a probabilidade de não pegar nenhum peixe em meia hora é igual a $1-p$. Como a probabilidade de pegar pelo menos um peixe em uma hora é $0,64$, segue que a probabilidade de não pegar nenhum peixe em uma hora é $1-0,64=0,36$. Ora, mas se não pegou um peixe em uma hora, quer dizer que não pegou nenhum peixe durante a primeira meia hora e também não pegou nenhum peixe durante a segunda meia hora, o que ocorre com probabilidade $(1-p)(1-p)$. Assim, temos que:

$$(1-p)^2 = 0,36 \Rightarrow 1-p = 0,60 \Rightarrow p = 0,40 \ (=40\%)$$

.

11. Cada um dos números $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_{95}$ é igual a ±1. O menor valor positivo da soma

$$S = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{94}a_{95} = \sum_{i,j=1}^{95} a_ia_j.$$

é:

- ◯ (a) 95
- ◯ (b) 11
- ◯ (c) 95^2
- ◯ (d) 13
- ◯ (e) 13^2

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Sejam m a quantidade de números $a_{i's}$ que são iguais a $+1$ e n a quantidade de números $a_{i's}$ que são iguais a -1. Como são 95 números, temos que:

$$m+n=95 \qquad e \qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_{94}^2+a_{95}^2=95.$$

Por outro lado, temos que

$$2S+95 = (a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{94}+a_{95})^2 = (m-n)^2$$

Ora, o menor número inteiro positivo que somado a 95 seja um quadrado perfeito é 26 $(26+95=121)$. Portanto, $2S=26 \Rightarrow S=13$. Observe que, neste caso, $|m-n|=11$, o que implica $m=53$ e $n=42$ ou $m=42$ e $n=53$.

12. Os últimos dois dígitos (contados da esquerda para a direita) do maior inteiro que é menor do que

$$\frac{10^{93}}{10^{31}+3}$$

é igual a:

◯ (a) 0 e 9

◯ (b) 0 e 0

◯ (c) 3 e 9

◯ (d) 0 e 3

◯ (e) 1 e 5

Solução

A resposta correta é a alternativa (a).

Vamos chamar o maior inteiro que é menor do que a fração dada de $\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$. Agora, observe que

$$\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]=\left[\frac{10^{93}-3\cdot 10^{62}+3\cdot 10^{62}+9\cdot 10^{31}-9\cdot 10^{31}+27-27}{10^{31}+3}\right]=$$

$$=\left[\frac{(10^{3}+3)\cdot(10^{62}-3\cdot 10^{31}+9)-27)}{10^{31}+3}\right]=$$

$$\left[(10^{62}-3\cdot 10^{31}+9)-\frac{27}{10^{31}+3}\right].$$

Como $(10^{62}-3\cdot 10^{31}+9)$ é um número inteiro e $0<\frac{27}{10^{31}+3}<11$, temos que

$$\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]=(10^{62}-3\cdot 10^{31}+9).$$

Agora, é fácil ver que os dois últimos dígitos do maior inteiro menor do que a fração dada são: 0 e 9.

13. Um professor de Matemática escreve no quadro negro treze números inteiros, sendo que pelo menos três deles são positvos. Entre os 78 produtos possíveis dos números dois a dois, existem exatamente 22 negativos.
Dentre os 13 números escritos no quadro negro, a quantidade de números negativos é:

◯ (a) 10

◯ (b) 8

◯ (c) 9

◯ (d) 7

◯ (e) 2

Solução

A resposta correta é a alternativa (e).

Suponhamos que, dentre os números escritos no quadro negro, existem m números positivos, n números negativos e p iguais a zero. Como o total de números escritos foi 13, temos:

$$m+n+p=13. \qquad (*)$$

Por outro lado, para que o produto de dois números escritos seja negativo é preciso que um seja positivo e o outro negativo. É fácil ver que podemos fazer isso de $m \cdot n$ formas, pois existem m números positivos e n números negativos. Logo, temos que

$$m \cdot n = 22. \qquad\qquad (**)$$

Mas, pelas hipóteses, $m \geq 3$. Por $(**)$, temos que $m = 11$ ou $m = 22$. Mas, por $(*)$, podemos concluir que m não pode ser 22. Assim, $m = 11$ e $n = 2$. Portanto, a quantidade de números negativos é 2.

14. Oito cantores participam de um festival. Os organizadores planejam um número de concertos com quatro cantores se apresentando por vez. A quantidade de concertos nos quais um par de cantores participa junto é a mesma para todo par.
O número mínimo de concertos capaz de viabilizar o planejamento dos organizadores é:
   - ◯ (a) 28
   - ◯ (b) 12
   - ◯ (c) 24
   - ◯ (d) 14
   - ◯ (e) 70

Solução

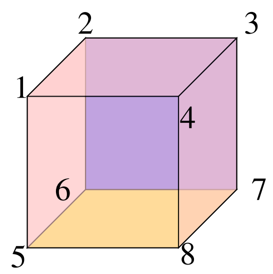
A resposta correta é a alternativa (d).
Seja c o número de concertos e j o número de concertos nos quais uma mesma dupla participa no festival. Assim, o número de apresentações pode ser calculado de dois modos:

$$j \cdot \binom{8}{2} \qquad e \qquad c \cdot \binom{4}{2}.$$

Portanto, temos que

$$j \cdot \binom{8}{2} = c \cdot \binom{4}{2} \Leftrightarrow j \cdot \frac{8!}{6!2!} = c \cdot \frac{4!}{2!2!} \Leftrightarrow 14j = 3c.$$

Como $MDC(3,14) = 1$, segue que c é divisível por 14 (e j é divisível por 3). Assim, temos que $c \geq 14$.
Sejam $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ os cantores. Usando a figura a seguir, onde os cantores são os vértices do cubo e as duplas formadas pelos extremos das aresta, é fácil ver que em 14 concertos podemos realizar o planejamento da organização.



15. Pinta-se de preto 15 casas do Tabuleiro 1 e observa-se a seguinte propriedade: ”Cada casa branca possui pelo menos um ponto em comum com alguma casa preta”.

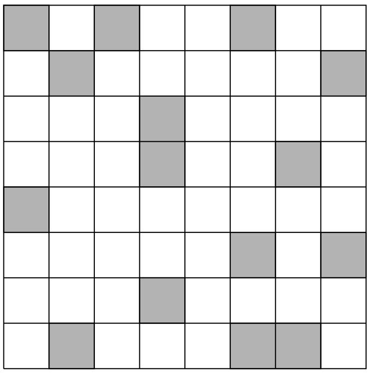


Tabela 1

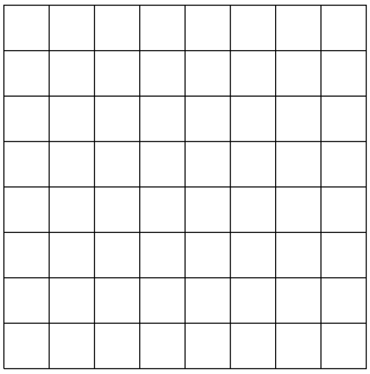


Tabela 2

A menor quantidade de casas do Tabuleiro 2 que devem ser pintadas de preto para que tenhamos a mesma propriedade é:

- ◯ (a) 7
- ◯ (b) 8
- ◯ (c) 9
- ◯ (d) 10
- ◯ (e) 11

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Dividimos o Tabuleiro 2 em 9 sub-tabuleiros de acordo com a figura a seguir.

	X			X			X
	X			X			X
	X			X			X

Tabela 2

Em cada sub-tabuleiro marcamos uma casa com um X, que chamaremos de *casa especial*.
Agora, demonstraremos que em cada sub-tabuleiro deve haver pelo menos uma casa preta.
Se um desses sub-tabuleiros possui todas casas brancas, então a casa especial desse sub-tabuleiro seria branca e não teria qualquer ponto em comum com alguma casa preta, pois está rodeada de casas brancas, o que é uma contradição com as hipóteses do problema. Portanto, em cada sub-tabuleiro deve haver pelo menos uma casa preta. Mas, como existem 9 sub-tabuleiros, então deve haver pelo menos 9 casas pretas em todo o Tabuleiro 2.
Um exemplo dessa situação é quando se pinta de preto todas as casas marcadas com X. Para concluir, este exemplo é válido porque cada casa branca forma parte de um dos sub-tabuleiros, o que implica que terá pelo menos um ponto em comum com a casa especial desse sub-tabuleiro, que está pintada de preto.

16. Numa progressão aritmética $\{a_n\}$, com $a_1 > 0$, temos que $3a_8 = 5a_{13}$. Chamamos de S_n a soma dos primeiros n termos da progressão.
O valor de n para o qual a soma S_n seja máxima é:
   - ◯ (a) 10
   - ◯ (b) 11
   - ◯ (c) 20
   - ◯ (d) 24
   - ◯ (e) 32

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Seja r a razão da progressão aritmética dada. Temos que:

$$3a_8 = 5a_{13} \Leftrightarrow 3(a_1 + 7r) = 5(a_1 + 12r) \Leftrightarrow 2a_1 = -39r \Leftrightarrow a_1 = \frac{-39r}{2}.$$

Como $a_1 > 0$, temos que $r < 0$. Isto significa que $a_8 > a_{13}$. Portanto, temos que

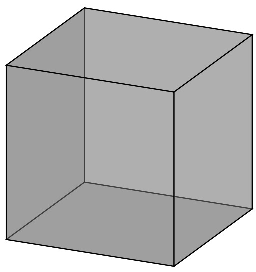
$$a_{20} = a_1 + 19r = \frac{-39r}{2} + 19r = -\frac{r}{2} > 0, \text{ pois } r < 0.$$

enquanto que

$$a_{21} = a_1 + 20r = \frac{-39r}{2} + 20r = \frac{r}{2} < 0.$$

Portanto, a soma é máxima quando $n = 20$.

17. Pinta-se cada face de um cubo com uma dentre 6 cores, de tal modo que quaisquer duas faces adjacentes tenham cores distintas. Duas faces são ditas adjacentes se possuem uma aresta em comum.



A quantidade de maneiras distintas de pintar o cubo é:
   - ◯ (a) 180
   - ◯ (b) 230
   - ◯ (c) 210
   - ◯ (d) 160
   - ◯ (e) 240

Solução

A resposta correta é a alternativa (b).
A idéia da solução é examinar separadamente as possíveis quantidades de cores utilizadas na

pintura: o mínimo de 3 e o máximo de 6 cores, pois com uma ou duas cores não é possível fazer a pintura nas condições do problema.

Se fossem ultilizadas somente 3 dentre as 6 cores, cada uma delas pintaria um par de faces opostas. Existem $\binom{6}{3} = 20$ maneiras distintas de se escolher 3 das 6 cores diponiveis. Para cada uma dessas 20 escolhas distintas ha apenas um modo de pintarmos as faces do cubo de modo que faces vizinhas nao possuam a mesma cor. Assim há, nesse caso, 20 modos distintos de pintarmos o cubo sem que duas faces vizinhas tenham a mesma cor.

Se fossem ultilizadas somente 4 dentre as 6 cores, duas delas teriam que ser utilizadas para pintar dois pares de faces opostas. Desse modo, elas poderiam ser escolhidas de $\binom{6}{2} = 15$ maneiras distintas. Para cada uma dessas 15 escolhas distintas existem 6 modos distintos de pintarmos o cubo, pois das 4 cores escolhidas temos $\binom{4}{2} = 6$ modos distintos de escolhermos duas cores para pintarmos dois pares de faces opostas do cubo e entao apenas 1 possibilidade de usarmos as duas outras faces retantes. (nesse ponto poderia se pensar que sao duas possibilidades para pintar as duas faces restantes com as duas cores que sobraram, mas não são, pois uma rotacao faz com que uma coincida com a outra). Assim, pelo Principio Multiplicativo, existem $15 \times 6 = 90$ modos distintos de pintarmos o cubo com 4 cores distintas, entre as 6 cores disponiveis.

Se 5 cores fossem utilizadas. Para cada uma dessas 6 possibilidades existem 30 modos distintos de pintarmos o cubo respeitando-se a condicao de que duas faces vizinhas não sejam de mesma cor, pois existem 5 possibilidades de escolhermos a cor que podemos pintar um par de faces opostas e, escolhida essa cor, sobram 4 cores para pintarmos as 4 faces restantes, o que pode ser feito de $(4-1)! = 3! = 6$ modos distintos (aqui usamos a permutacao circular de 4 cores distintas). Note ainda que há uma outra simetria; se considerarmos a inversa de cada uma dessas 6 permutações circulares ainda termos uma mesma pintura, o que revela que existem $\frac{5\times 6}{2} = 15$ modos diferentes de pintarmos o cubo com 5 cores distintas de modo que nenhum par de faces vizinhas tenham a mesma cor. Ora, como existem 6 possibilidades de escolhermos as 5 cores e para cada uma dessas escolhas existem 15 modos de pintar o cubo, segue pelo princiopio multiplicativo que existem $6 \times 15 = 90$ modos distindos de pintarmos o cubo com 5 das 6 cores disponiveis de modo de duas faces vizinhas nao possuam a mesma cor.

Se 6 cores fossem utilizadas, existem 30 maneiras distintas de realizarmos a pintura, pois $6! = 720$ são a maneiras di ferentes de distribuirmos as 6 cores distintas nas 6 faces e, além disso, cada face pode ser vista de uma mesma forma por um observador de 4 maneiras diferentes e, como são 6 as faces do cubo, existem $4 \times 6 = 24$ modos distintos de ver uma mesma pintura, revelando assim que, nesse caso, o número de pinturas distintas, respeitando-se as restricoes do enunciado, é de $\frac{720}{24} = 30$.

Portanto, quantidade total de maneiras distintas de pintar o cubo é:

$$20 + 90 + 90 + 30 = 230.$$

18. Na sua representação na base 10, o número inteiro positivo m possui 2017 oitos e o número inteiro positivo n possui 2017 cincos:

$$m = \underbrace{88888\ldots 88}_{\text{2017 dígitos 8}} \qquad \text{e} \qquad n = \underbrace{55555\ldots 55}_{\text{2017 dígitos 5}}.$$

A soma dos dígitos da representação de $9 \cdot m \cdot n$ na base 10 é:

◯ (a) 15880

◯ (b) 18856

◯ (c) 18153

◯ (d) 15874

◯ (e) 19851

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Inicialmente, observe que a representação decimal do número inteiro positivo $9 \cdot m \cdot n$ termina em zero, pois o produto dos dígitos das unidades de m e n é igual $8 \times 5 = 40$. Isto significa que a soma dos dígitos de $9 \cdot m \cdot n$ é a mesma que a soma dos dígitos do número inteiro positivo

$$K = \frac{9 \cdot m \cdot n}{10}.$$

Agora, observe que, todo número inteiro positivo t cuja representão decimal é constituída uma sequência de k dígitos a, pode ser escrito como:

$$t = \underbrace{ddddd\dots dd}_{k \text{ dígitos } d} = \frac{d}{9} \cdot \underbrace{9999\dots 99}_{k \text{ dígitos } 9} = \frac{d}{9}(10^k - 1).$$

Logo, podemos escrever:

$$K = \frac{9}{10}[\frac{8}{9}(10^{2017} - 1)][(\frac{5}{9}(10^{2017} - 1)] = \frac{4}{9}(10^{2 \cdot 2017} - 2 \cdot 10^{2017} + 1) =$$

$$= \frac{4}{9}[(10^{2 \cdot 2017} - 1) - 2 \cdot (10^{2017} - 1)] = \frac{4}{9}(10^{2 \cdot 2017} - 1) - \frac{8}{9}(10^{2017} - 1) = P - Q,$$

onde P é o número inteiro positivo cuja representação decimal consiste de $2 \cdot 2017$ dígitos 4 e Q é o número inteiro positivo cuja representação decimal consiste de 2017 dígitos 8:

$$P = \underbrace{4444\dots 44}_{2 \times 2017 \text{ dígitos } 4's} \quad \text{e} \quad Q = \underbrace{8888\dots 88}_{2017 \text{ dígitos } 8's}.$$

Assim, a representação decimal do número K consiste de 2016 dígitos 4 seguido por 1 dígito 3, 2016 dígitos 5 e apenas 1 dígito 6.
Portanto, a soma dos dígitos de K é igual a

$$2016 \cdot 4 + 3 + 2 + 2016 \cdot 5 + 6 = 18.153.$$

19. Uma sequência de números inteiros $a_1, a_2, a_3, \dots$ é tal que

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Se a soma dos primeiros 1493 termos é 2017 e a soma dos primeiros 2017 termos é 1493, então a soma dos primeiros 2025 termos é:

◯ (a) 1985

◯ (b) 2047

◯ (c) 7020

○ (d) 14008

○ (e) 12198

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Calculando os primeiros 8 termos da sequência obtemos:

$$a_3 = a_2 - a_1$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = (a_2 - a_1) - a_2 = -a_1$$
$$a_5 = a_4 - a_3 = -a_1 - a_2 + a_1 = -a_2$$
$$a_6 = a_5 - a_4 = -a_2 + a_1 = a_1 - a_2$$
$$a_7 = a_6 - a_5 = (a_1 - a_2) + a_2 = a_1$$
$$a_8 = a_7 - a_6 = a_1 - a_1 + a_2 = a_2$$
$$a_9 = a_8 - a_7 = a_2 - a_1$$
$$a_{10} = a_9 - a_8 = a_2 - a_1 - a_2 = -a_1$$

É fácil ver que os termos da sequência aparecem em blocos cíclicos de seis. Isto é,

$$a_n = a_{n+6}, \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Agora, observe que a soma de seis termos consecutivos quaisquer é igual a zero:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_2 + (a_2 - a_1) + (-a_1) + (-a_2) + (a_1 - a_2) = 0$$
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0$$
$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Como $1493 = 6 \cdot 248 + 5$, segue que a soma S_{1493} é igual a

$$S_{1493} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_2 - a_1.$$

Assim, temos que

$$S_{1493} = a_2 - a_1 = 2017 \qquad (*)$$

Como $2017 = 6 \cdot 336 + 1$, segue que a soma S_{2017} é igual a

$$S_{2017} = a_1 = 1493 \qquad (**)$$

Assim, de $(*)$ e $(**)$, temos que

$$a_2 - a_1 = 2017 \qquad e \qquad a_1 = 1493 \Rightarrow a_2 = 3510$$

Como $2025 = 6 \cdot 337 + 3$, segue que

$$S_{2025} = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 3510 = 7020.$$

20. Augusto fez uma lista de todos os números racionais da forma $\frac{m}{17}$, onde m é um número natural relativamente primo com 17, e tais que $\frac{m}{17}$ seja menor do que 17.
A soma dos números da lista de Augusto é:

- ◯ (a) 4896
- ◯ (b) 2448
- ◯ (c) 5472
- ◯ (d) 2312
- ◯ (e) 4913

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Como 17 é um número primo, 17 será relativamente primo com todo número que não seja múltiplo de 17. Mas, como

$$\frac{m}{17} < 17 \Rightarrow m < 17 \cdot 17 = 289, \text{ com } m \in \mathbb{N}.$$

Logo, $m \in \{1, 2, 3, \ldots, 288\}$. Assim, podemos calcular a soma de todas as frações do tipo $\frac{m}{17}$, com $1 \leq m \leq 288$:

$$\frac{1}{17} + \frac{2}{17} + \frac{3}{17} + \ldots + \frac{288}{17} = \frac{1}{17} \cdot \frac{288 \cdot (288+1)}{2} = 2448. \qquad (*)$$

Agora, da soma (*) temos que diminuir a soma de todas as frações da forma $\frac{m}{17}$, onde m é um múltiplo de 17 e $1 \leq m \leq 288$. Ou seja, temos que diminuir de $(*)$ a soma:

$$\frac{17 \cdot 1}{17} + \frac{17 \cdot 2}{17} + \frac{17 \cdot 3}{17} + \ldots + \frac{17 \cdot 16}{17} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 16 = \frac{16(16+1)}{2} = 136.$$

Portanto, a resposta será: $2448 - 136 = 2312$.