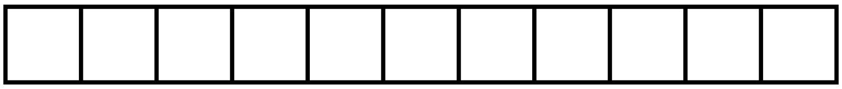
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

LISTA SEMANAL Nº 13 - Data 24/07/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Tem-se um tabuleiro com 11 casas como na figura a seguir.



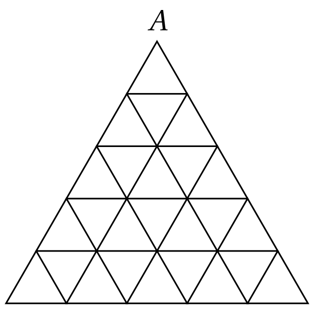
Dado $k = 99$, Bruno escreve um número natural em cada casa do tabuleiro, sem repetir números, de forma que o produto dos números de duas casas vizinhas quaisquer seja sempre um multiplo de k.
Se M é o maior dos números escritos por Bruno, determine o valor mínimo possivel de M e mostre uma maneira de completar o tabuleiro para a qual se obtém o valor mínimo de M, justificando por que não é possivel obter um valor menor.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Determine o **menor** número natural n para o qual vale o seguinte resultado:
Não importa como cada elemento do conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ seja pintado com uma das cores: vermelha ou azul, existem números inteiros $x, y, z, w \in S$, não necessariamente distintos, pintados com a mesma cor, tais que $x + y + z = w$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

O triângulo equilátero ABC possui os lados com comprimentos iguais a K, onde K é um número inteiro positivo. Traçando segmentos de retas paralelos aos lados, divide-se a região limitada pelo triângulo ABC em regiões menores limitadas por triângulos equiláteros de lado medindo 1, veja figura a seguir para o caso em que $K = 5$.



Escolhe-se um caminho contínuo começando na região limitada pelo triângulo menor com vértice em A, de modo que o caminho passe de uma região limitada por um triângulo menor para outra através de um lado comum aos dois triângulos. O caminho é formado de tal maneira que nenhuma das regiões, limitadas por um dos triângulos equiláteros menores, seja visitada mais de uma vez.
Encontre, justificando, o maior número de regiões menores, limitadas pelos triângulos equiláteros de lado 1, que o caminho permite visitar.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Diga, justificando, se existem polinômios $a(x)$, $b(x)$, $c(y)$, $d(y)$ para os quais

$$1 + xy + x^2y^2 \equiv a(x)c(y) + b(x)d(y)$$