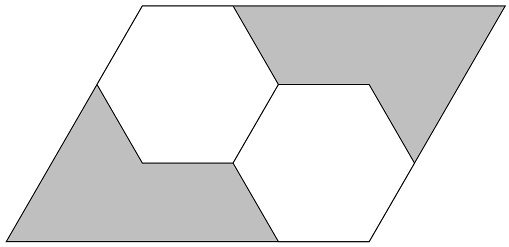
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 08 - Data 08/05/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

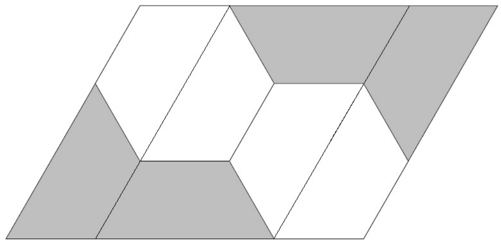
Na figura a seguir, temos dois hexágonos regulares congruentes e um paralelogramo.



Que fração da área do paralelogramo está hachurada?

Solução

Um hexágono regular é uma figura interessante, pois todos seus ângulos internos medem 60°, ou seja, todos os lados estão a uma mesma distância do seu centro. Assim, traçamos dois segmentos de retas paralelos a dois dos lados paralelos do paralelogramo e se inclinam 60° com os outros dois lados, passando pelo respectivo centro do hexágono, dividindo a figura em 8 metades da área do hexágono, veja figura a seguir.



Portanto, a área hachurada é a metade da área do paralelogramo.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Seja $S = \{1, 2, 3, \ldots, 48, 49\}$. Qual é o valor máximo do inteiro positivo n para o qual é possível escolher n números de S e arranjá-los em volta de um círculo, de maneira que o produto de dois números adjacentes seja menor do que 100?
(Para cada número em volta do círculo, percorrendo o circulo no sentido horário, os números adjacentes a ele são, respectivamente, o que vem imediatamente antes e o que imediatamente o segue)

Solução

Inicialmente, observe que o produto de dois números (distintos) com dois dígitos é sempre maior do que 100. Logo, se escolhemos um número de S com dois dígitos, os dois números adjacentes a ele no círculo tem de ser um número de um só dígito. Assim, no máximo podemos escolher 9 números com um dígito: $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9$ e, não importa como eles são arrumados em volta do círculo, só podemos colocar um único número com dois dígitos entre quaisquer dois deles. Portanto, $n \leq 18$. Por outro lado o arranjo

$$1,\ 4,\ 2,\ 33,\ 3,\ 24,\ 4,\ 19,\ 5,\ 16,\ 6,\ 14,\ 7,\ 12,\ 8,\ 11,\ 9,\ 10,\ 1$$

mostra que $n \geq 18$. Portanto, $n = 18$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Em uma linha se escrevem os números de 1 a 2015 em ordem crescente e abaixo dessa linha se escrevem os números de 1 a 2015, em ordem decrescente, tal que cada coluna forma um par com dois números. Em quantas dessas colunas, um número divide o outro?

Solução

Observemos que, se o primeira número de uma columna é k, o segundo número da mesma coluna será $2016-k$. Logo, k *divide* $(2016-k)$ ou $(2016-k)$ *divide* k. No primeiro caso, teremos que k *divide* $(2016-k+k=2016)$, de onde se toman os divisores de 2016 salvo 2016, e que k não assume este valor, de onde teremos 35 números. Agora, observe que o segundo caso é simétrico ao primeiro, o que implica que haverá também 35 casos, mas estaríamos contando os pares $k=1008$, $(2016-k)=1008$ duas vezes. Portanto, existem $35+34=69$ colunas onde um número divide o outro.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Dado um inteiro $n>1$, seja S_n o grupo de permutações dos números $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n$. Dois jogadores, A e B, disputam o jogo seguinte em que jogam alternadamente. Um movimento consiste em escolher um (único) elemento do grupo S_n. Não pode ser escolhido um elemento que foi escolhido antes. O jogo termina quando os elementos escolhidos geram todo o grupo S_n. O jogador que fez a última jogada perde o jogo. O jogador A inicia o jogo. Qual jogador tem uma estratégia vencedora?

Solução

Para $n=2$ e $n=3$, o jogador A vence o jogo. No caso $n=2$, basta o jogador A escolher o elemento identidade. No caso $n=3$, basta o joagador A escolher uma permutação de comprimento 3 (que gera um subgrupo de ordem 3).
Vamos provar a seguir que para $n \geq 4$, o jogador B vence.
Considere o momento quando todos os movimentos imediatos sejam perdedores. Seja H o subgrupo gerado pelos elementos escolhidos até então pelos dois jogadores. Ora, escolhendo um outro elemento de H não é possível perder o jogo imediatamente, então todos os elementos de H já devem ter sido escolhidos. Como juntando a H qualquer outro elemento de S_n fora de H geraríamos S_n, temos que H é um subgrupo maximal de S_n.
Se a ordem do subgrupo H é par, o próximo jogador a fazer seu movimento é A, o que implica que o jogador B vence.
Seja n_i a ordem do subgrupo gerado por todos os primeiros i elementos escolhidos. Logo,

$n_1|n_2|n_3|\ldots$. Vamos mostrar que o jogador B pode sempre obter n_2 par e $n_2 < n!$. Logo, a ordem de H será par e, consequentemente, o jogador A fará um movimento perdedor.
Seja g o elemento de S_n escolhido pelo jogador A no seu primeiro movimento.
Se n_1, a ordem do elemento g, é par então B escolhe a permutação identidade e teremos $n_2 = n_1$, e $n_2 < n!$.
Se n_1, a ordem do elemento g, é ímpar, então g é o produto de ciclos ímpares disjuntos distintos. Logo, g é uma permutagão par. Então o jogador B pode escolher a permutação $h = (1,\ 2) \cdot (3,\ 4)$ que é uma outra permutação par. Como g, h são elementos do grupo alternado A_n elas não podem gerar todo o S_n. Como a ordem de h é 2, o jogador B obtém que $2|n_2$.
Observação - Se ≥ 4, então todos os subgrupos de ordem ímpar são subgrupos de A_n, que possui ordem par. Portanto, todos os subgrupos maximais possuem ordem par e o jogador B nunca fica numa posição perdedora.