OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 09 - Data 15/05/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Tem-se um tabuleiro retangular 2×13. Em cada casa da linha inferior do tabuleiro há uma ficha e as fichas estão numeradas de 1 a 13, da menor para a maior, estando a linha superior vazia.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

A operação permitida é mover uma ficha para uma casa adjacente (aquela que tem um lado em comum com a casa onde a ficha se encontra). O objetivo é que no final das várias operações permitidas as fichas estejam ordenadas da maior para a menor, do 13 ao 1, posicionadas na linha inferior do tabuleiro. Fazer isso com o número mínimo de operações permitidas. Justificar que o número encontrado é o mínimo.

Solução

Se partirmos do princípio que podemos mover cada ficha como se ela tivesse sozinha no tabuleiro, precisamos de 84 operações para localizá-las na ordem inversa, de 13 para 1. Isto significa que a ficha com o número n deve mover-se $|n-7| \times 2$ lugares (ou seja, ir de sua casa para a caixa 7 e da casa 7 para o lugar oposto.
Então todas as fichas, com exceção da ficha de número 1 devem mover-se da linha inferior para a linha superior e retornar pelo menos uma vez.
De fato, suponhamos que existem duas fichas que nunca se movimentam para a linha superior. Sejam, respectivamente, a e b os números dessas ditas fichas, com $a < b$, ou seja, inicialmente a está à esquerda de b. Observemos que a ficha numerada com a deve ir para a posição $14-a$ e a ficha numerada com b deve ir para a posição $14-b$. Agora, temos que

$$a < b \Rightarrow -b < -a \Rightarrow (14-b) < (14-a),$$

o que implica que a ficha de número b deve terminar à esquerda da ficha de número a, o que significa uma das duas deve se movimentar para a linha superior.
Assim, esta situação acrescenta $12 \times 2 = 24$ operações. Suponha que existe uma ficha que não faz o movimento "para cima e para baixo". Todas as fichas que estão do seu lado esquerdo devem ir à sua direita e vice-versa. Se esta ficha não faz o movimento "para cima e para baixo", significa que as restantes 12 fichas tem de fazer o movimento "para cima e para baixo" em algum momento. Portanto, o número mínimo de operações permitidas será igual a $84 + 24 = 108$.
O exemplo com 108 movimentos não é muito difícil de fazer. Mova as fichas como se fosse um "trem" na linha superior. Isto é, movimento a ficha de número 1 para a linha superior e a coloque no final da linha, e faço o mesmo com todas fichas até a de número 7. Com a ficha de número 7 basta subi-la para a primeira linha. A ficha de número 8 faz-se as operações de modo a colocá-la atrás da ficha de número 7, e assim até chegar a ficha de número 12. A ficha de número 13 não

sobe para a primeira fila, vai direto para o lugar ocupado pela ficha de número 1. Deste modo, finalmente, baixo todas as fichas que estão na primeira linha para a respectiva coluna na segunda linha, resolvendo o problema.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Juliano encontrou os primeiros 100 números primos, elevou cada um deles a quarta potência e somou os resultados. Determine o último dígito (o das unidades) da soma do Juliano.
ESCLARECIMENTO: O número 1 **não** é primo.

Solução

Os números encontrados por Juliano foram: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$. Observe que todos os primos encontrados por Juliano, exceto 2 e 5, tem dígito das unidades 1, 3 ou 7, pois não existe nenhum número primo par maior do que 2 e nenhum múltiplo de 5 maior do que 5 é primo. Seja S a soma das quarta potência de todos os 100 primeiros primos. Observe que o dígito das unidades de qualquer inteiro positivo é igual ao resto da divisão desse número por 10. Logo, para encontrar o dígito das unidades de S basta encontrar o resto da divisão de S por 10. Para isso, basta identificar o resto de cada da divisão por 10 de cada uma das 100 quarta potência dos primos e somá-los. Agora, para fazer isso, basta observar que como $2^4 = 16$, $5^4 = 625$, existem dois números cujos dígitos das unidades são respectivamente 6 e 5 e as restantes 98 quarta potência tem o dígito das unidades igual a 1, pois 1^4, 3^4, 7^4 tem dígito das unidades igual a 1, pois, como vimos acima, os restantes 98 primos tem dígito das unidades 1, 3 ou 7. Assim, o dígito das unidades de S será o dígito das unidades do número

$$6+5+98\times 1 = 6+5+98 = 109 \; e \; 109 = 10\times 10+9$$

Portanto, a resposta é 9.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Seja $K = 2016^{2016}$ e seja S o conjunto dos inteiros consecutivos de 1 até K. De quantas maneiras distintas podemos retirar de S três números inteiros consecutivos para que a média dos restantes seja um número inteiro?

Solução

A resposta é 4.
Como $2016 = 2^5\times 3^2\times 7$, segue que K é um múltiplo de 6. Logo, podemos escrever $K = 6u$, para algum inteiro positivo u. Suponha que retiramos de S os três inteiros consecutivos $a-1$, a, $a+1$, com $2 \le a \le 6$. Assim, retiramos de S a soma $(a-1)+a+(a+1) = 3a$.
Por outro lado, como a soma dos primeiros K números inteiros positvos é igual a $\frac{K(K+1)}{2}$, segue que a média dos números restante é igual a

$$\frac{\frac{6u(6u+1)}{2}-3a}{6u-3} = \frac{3u(6u+1)-3a}{6u-3} = \frac{18u^2+3u-3a}{6u-3} = \frac{6u^2+u-a}{2u-1},$$

que tem de ser um número inteiro. Mas, escrevendo o resultado acima de outra maneira, temos

$$\frac{\frac{6u(6u+1)}{2}-3a}{6u-3} = \frac{6u^2+u-a}{2u-1} = \frac{6u^2-3u+4u-a}{2u-1} = \frac{3u(2u-1)}{2u-1}+\frac{4u-a}{2u-1} = 3u+\frac{4u-a}{2u-1}.$$

O problema agora se reduz a encontrar os valores de a para os quais $\frac{4u-a}{2u-1}$ é um número inteiro.
Como $2(2u-1) \geq (4u-a)$, segue que os únicos valores possíveis para a são -1, 0, 1 e 2.
Quando $4u-a=2(2u-1)=4u-2$, temos $a=2$.
Quando $4u-a=2u-1$, temos $a=2u$.
Quando $4u-a=1-2u$, temos $a=6u-1$.
Quando $4u-a=0$, temos $a=4u$.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Calcule

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\cos x}{\frac{1}{n}+nx^2}dx$$

Solução

A resposta é $\frac{\pi}{2}$.
Na integral dada, faça a seguinte mudança de variáveis: $y=nx$, com $y\geq 0$. Isto nos dá:

$$\frac{1}{n}+nx^2=\frac{1}{n}+n\frac{y^2}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{y^2}{n}=\frac{1+y^2}{n} \quad e$$

$$dy=ndx \Rightarrow \; dx=\frac{dy}{n}.$$

Com isso, podemos escrever

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\cos x}{\frac{1}{n}+nx^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y}{n}}}{\frac{1}{n}+ny^2}\cos\left(\frac{y}{n}\right)dy=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y}{n}}}{y^2+1}\cos\left(\frac{y}{n}\right)dy$$

Mas, temos que:

$$\left|\frac{e^{-\frac{y}{n}}}{y^2+1}\cos\left(\frac{y}{n}\right)\right|\leq\frac{1}{y^2+1},$$

com $y\geq 0$, $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y}{n}}}{y^2+1}dy=\frac{\pi}{2}$.
Portanto, temos que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y}{n}}}{y^2+1}dy\to\frac{1}{y^2+1}=\frac{\pi}{2}$.