OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 10 - Data 12/06/2017

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Os operários A e B juntos fazem um trabalho em 6 dias, os operários B e C juntos fazem o mesmo trabalho em 10 dias, enquanto C e A juntos fazem em $7\frac{1}{2}$ dias. Em quantos dias cada um dos operários separadamente fazem o mesmo trabalho?

Solução

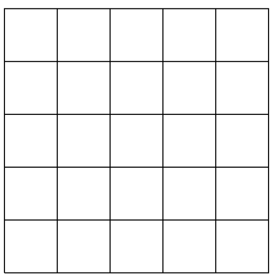
Temos que:
A e B fazem $\frac{1}{6}$ do trabalho em 1 dia.
B e C fazem $\frac{1}{10}$ do trabalho em 1 dia.
C e A fazem $\frac{2}{15}$ do trabalho em 1 dia.
Assim, somando, duas vezes o trabalho realizado por A, B, C juntos em 1 dia é igual a

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{2}{15}=\frac{10+6+8}{60}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}.$$

Logo, juntos os operários A, B, C fazem $\frac{1}{5}$ do trabalho em 1 dia.
Por outro lado, os operários B e C fazem $\frac{1}{5}$ do trabalho em 1 dia.
Logo, por subtração, o operário A realiza $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$ do trabalho em 1 dia.
Segue que o operário B realiza $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$ do trabalho em 1 dia e
o operário C realiza $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$ do trabalho em 1 dia.
Portanto, os operários A, B, C realizam todo o trabalho em 10, 15, 30 dias, respectivamente.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

É possível distribuir as 25 letras $A, A, A, A, A, B, B, B, B, B, C, C, C, C, C, D, D, D, D, D$ nas casas do tabuleiro 5×5 (uma letra por casa)



de modo que nenhuma letra aparece repetida em uma linha ou coluna?

Solução

O desenho a seguir é uma solução para o problema.

A	B	C	D	E
C	D	E	A	B
E	A	B	C	D
B	C	D	E	A
D	E	A	B	C

Observação Na figura a cima, você pode percorrer todas as casas com a mesma letra fazendo movimentos usuais do cavalo (peça do jogo de xadrez).

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Inicialmente, escreve-se no quadro-negro o número 33. As operações permitidas são:
Operação A: substitua o número n escrito no quadro-negro pelo número n^3-1.
Operação B: substitua o número n escrito no quadro-negro pelo número $k+d$, onde d é um dígito qualquer de n e k é o número obtido suprimindo o dígito d de n.
Por exemplo, se $n=2012$ e d é o primeiro dígito 2 de n, então $d=2$, $k=012=12$ e $k+d=12+2=14$. Por outro lado, se $d=1$, temos que $k=202$ e $k+d=202+1=203$.
(i) Mostre como você pode obter o número 511 usando uma sequência de operações permitidas.
(ii) Prove que não é possível obter o número de 2017, através de uma sequência de operações permitidas.

Solução

(i) Seja $f(n)=n^3-1$ e $g(n)=k+d$.
Assim, temos que

$$g(33)=3+3=6$$

$$f(6)=6^3-1=216-1=215$$

$$g(215)=21+5=26$$

$$g(26)=2+6=8 \ \ e$$

$$f(8)=8^3-1-512-1=511.$$

(ii) Observe que, para qualquer número inteiro n, na divisão por 9, o numero n^3 somente deixa resto 0, 1 ou 8. Isto implica que, como resultado da operação A, somente teremos números congruentes a 0, 7 ou 8 módulo 9.
Além disso, se $S(n)$ é a soma dos dígitos de n, então a soma dos dígitos do número obtido como resultado da operação B aplicada a n, que chamaremos de $S(B(n))$, é côngruo a $S(n)$ módulo 9, pois $S(B(n))=S(k)+d-9r=S(n)-9r$, onde r é o número de faixas que se produz ao somar $k+d$.
Se 2017 pudesse ser obtido fazendo as operações A e B, em algum momento deveríamos fazer a operação A, pois realizando somente a operação B pode-se chegar somente ao 6.
Agora, a última vez que se realiza a operação A, obtém-se um número congruente a 0, 7 ou 8 módulo 9, e as seguidas operações B não modifica esse valor módulo 9. Mas, acontece que $2017 \equiv 1 \ (mod\ 9)$. Portanto, não pode ser obtido o número 2017 aplicando uma sequência de operações permitidas.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Calcule a soma

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Solução

Seja $T_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$. Assim,

$$T_{3k}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right].$$

Seja $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Sabe-se que $(H_n-\ln\, n)\to\ converge.$
Agora,

$$T_n=H_{4n-1}-\frac{1}{2}H_{2n-1}+\frac{1}{2}H_n$$

$$T_n=\ln\,(4n-1)+\frac{1}{2}\ln\,(2n-1)+\frac{1}{2}\ \to\ 0.$$

Portanto, $T_n\ \to\frac{3}{2}\ln\,2.$