OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 01 - DATA 05/03/2018

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Um grilo, pulando ao longo de uma reta em qualquer direção, pode atingir um ponto que está a 6 ou 8 centímetros de onde ele se encontra.
O grilo pode atingir um ponto que está localizado a uma distância de:
(a) 1.5 centímetros da posição original? (b) 7 centímetros? (c) 4 centímetros?

Solução

(a) A resposta é não. Como o grilo só pode alcançar uma distância inteira a partir da posição em que se encontra, não poderá atingir um ponto que está a 1.5 centímetros da posição original.
(b) A resposta é não. O deslocamento do grilo é sempre um número par de centímetros. Logo, não pode ocupar um ponto que está a uma distância ímpar de centímetros.
(c) A resposta é sim. Por exemplo, o grilo pode pular duas vezes para uma distância de 6 centímetros numa direção e 8 centímetros na direção contrária.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo num tabuleiro 4×4. Um movimento consite em pintar de vermelho um dos quadrados unitários (que ainda não foi pintado). Eles jogam alternadamente e o jogador começa. Um jogador perde se depois de sua jogada pinta-se completamente um quadrado 2×2.
Supondo que ambos fazem suas melhores jogadas, quem vence, o jogador A ou o jogador B? Qual a estratégia vencedora?

Solução

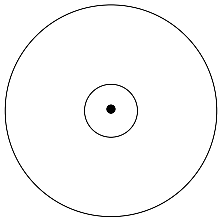
O jogador B vence. Em cada movimento do jogador A, o jogador B pintar dois quadrados acima (ou dois quadrados abaixo) na mesma coluna. É fácil ver que, sempre que o jogador A fizer seu movimento, B pode fazer o seu movimento, o que implica que o jogador A vai ter de pintar um quadrado 2×2, perdendo o jogo.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

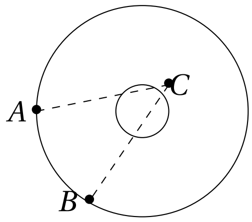
Um gafanhoto está situado na borda de uma pátio circular com diâmetro de 3 metros. Num salto o gafanhoto percorre uma distância de exatamente 2 metros.
Se o gafanhoto nunca deixa o pátio, que pontos do pátio pode atingir?

Solução

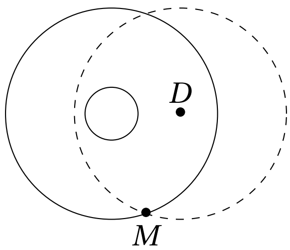
Observe que o gafanhoto não poderá ocupar qualquer ponto dentro do círculo central com raio igual a 0.5 metros, pois a distância de todo ponto sobre o pátio ao círculo central é menor do que 2 metros, veja Figura a seguir.



Agora vamos provar que o gafanhoto, partindo do bordo, pode atingir qualquer outro ponto do pátio localizado no exterior do círculo central de raio 0.5 cm.
Inicialmente, vamos mostrar que partindo de um ponto A sobre a borda do pátio, o gafanhoto pode atingir qualquer ponto B sobre a borda do pátio, veja figura a seguir.



Agora, basta observar que o círculo de raio 2 cm, centrado no ponto A, intercepta o círculo de raio 2 cm, centrado em B, num ponto C, que está fora do círculo central de raio 0.5 cm, veja a figura acima. Deste modo, o gafanhoto pode pular do ponto A para o ponto C e daí para o ponto B.
Agora, vamos mostrar que o gafanhoto pode ir para qualquer ponto D do anel de largura 1, compreendido entre a borda do pátio e a região circular central de raio 0.5 cm. Para isso, desenhe o círculo com centro em D e raio 2 cm, veja figura a seguir.



O círculo com centro no ponto D e raio 2 cm intercepta a borda em dois pontos (ou em um, se o ponto D está sobre a borda do anel). Seja M um desses pontos de interseção, veja na figura acima. O gafanhoto pula inicialmente para o ponto M e depois pula para o ponto D, o que conclui a prova.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Um dado com n faces tem os números inteiros de 1 a n (inclusive) distribuídos em suas faces (um número por face). Todos os valores nas faces do dado são igualmente susceptíveis de aparecer. Um dado com 8 faces, um dado com 12 faces e um dado com 20 faces são rolados.
Calcular a probabilidade de que o valor de um dos dados seja igual à soma dos outros dois dados.

Solução

Sejam a, b, c, respectivamente, os valores que aparecem ao serem rolados os três dados de 8, 12 e 20 faces. Chamamos um terno (a, b, c) de *grande* se um dos número é igual a soma dos outros dois.

Suponha que os dois dados, com 8 e 12 faces sejam rolados, aparecendo os números a e b, respectivamente. Em seguida, rola-se o dado com 20 faces. O terno (a, b, c) é *grande* se ou $c = a + b$ ou $c = a - b$ ou $c = b - a$.

O primeiro caso, quando $c = a + b$, é possível para todo par (a, b) e a probabilidade é igual a $\frac{1}{20}$ para cada par. De fato, temos que $a \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, e $b \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, o que implica que temos $8 \times 12 = 96$ possíveis ternos (a, b, c), com $c = a + b$, e existem 812×20 possíveis ternos (a, b, c).

O segundo e o terceiro caso só são possíveis se $a > b$ e $b > a$, respectivamente. Mas, novamente, em cada um desses casos, a probabilidade de se obter o o valor adequado de c é $\frac{1}{20}$.

Então a probabilidade total aparecer rolar um terno (a, b, c), que chamamos de it grande, satisfazendo ou $c = a - b$ ou $c = b - a$ é igual a

$$\frac{1}{20} \cdot P(a > b \; ou \; b > a)$$

Por outro lado, temos que

$$P(a > b \; ou \; b > a) = 1 - P(a = b) = 1 - \frac{8}{96} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Portanto, a probabilidade de se obter um terno *grande* é igual a

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} \cdot \frac{11}{12} = \frac{1}{20} + \frac{11}{240} = \frac{23}{240}.$$