OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

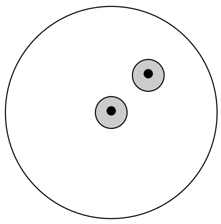
SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 02 - DATA 12/03/2018

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

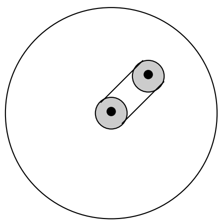
Numa folha de papel, desenha-se um círculo e marca-se um ponto na região limitada pelo círculo (diferente do centro do círculo). Pede-se:
(i) Corte a região limitada pelo círculo em **três** pedaços de modo que, arrumando os pedaços, você possa obter uma região circular cujo centro é o ponto marcado.
(ii) É possível fazer o mesmo procedimento só que cortando a região limitada pelo círculo em no máximo **dois** pedaços?

Solução

(i) Sim, é possível. Com centro no centro do círculo dado e no ponto marcado na região limitada pelo círculo dado, desenhe dois círculos com o mesmo raio (pequeno), veja figura a seguir.



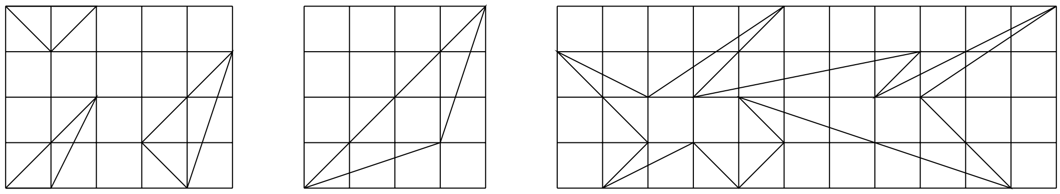
Em seguida, corte o papel ao longo dos dois círculos, dividindo assim a região limitada pelo círculo original em três partes. Agora, troque as posições dos dois pedaços circulares, para obter uma região circular cujo centro é o ponto marcado.
(ii) Sim, é possível. Usando o caso acima, cortamos a região limitada pelo círculo dado ao longo de uma faixa arredondada nas pontas, que contém as duas regiões circulares menores desenhadas acima, veja figura a seguir.



Com o corte acima, dividimos a região circular dada em duas partes. Agora, fazemos uma rotação de 180° na faixa arredondada e colocamos no espaço vazio. Com isso, vamos obter a mesma região circular, só que o centro é o ponto marcado.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Encontre as áreas das três figuras mostradas nos três diagramas a seguir, desenhadas num papel quadriculado, sabendo-se que a área de cada quadradinho é 1.



(A) (B) (C)

Solução

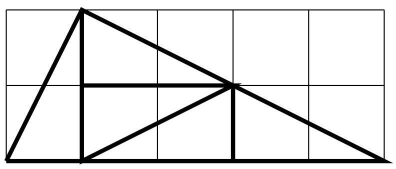
(A) - O triângulo que está no alto é formado por duas metades da região limitada por um quadradinho. Logo, tem área igual a 1.
O triângulo que está embaixo à esquerda está desenhada na região limitada por um quadrado 2×2 e tem altura medindo 2 e base medindo 1. Logo, a área é igual a 1.
O triângulo que está abaixo à direita está desenhada na região limitada por um retângulo 2×3, que tem área igual a 6. Para calcular a área deste triângulo, basta dimuir da área do retângulo a soma das áreas dos três triângulos que compõe, junto com o triângulo em questão, a área do retângulo 2×3. Assim, a área do triângulo é igual a: $6-2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=2$.
(B) - O triângulo está desenhado na região limitada pea metade do retângulo 4×3, que tem área $\frac{4\cdot 3}{2}=6$. Logo, a área do triângulo é igual a área do retângulo menos a soma das áreas das partes restantes da metade do retângulo. Assim, a área do triângulo é igual a $6-\frac{3\cdot 1}{2}-\frac{2\cdot 1}{2}-1=\frac{5}{2}$.
(C) - A solução é semelhante aos sub-ítens anteriores e pode ser feito de muitas maneiras distintas. A resposta é 13.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Diga, justificando, se existe um triângulo que pode ser cortado em:
(a) **três** pedaços na forma de três triângulos congruentes;
(b) **quatro** pedaços na forma de quatro triângulos congruentes;
(c) **cinco** pedaços na forma de cinco triângulos congruentes.

Solução

(a) Sim. Tome um triângulo equilátero e corte ao longo das bissetrizes, que se encontram num ponto central da região limitada pelo triângulo.
(b) Sim. Tome um triângulo equilátero e corte ao longo dos segmentos que ligam os pontos médios dos lados.
(c) Sim. Veja na figura a seguir uma possibilidade de resolver o problema.



PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Uma transformação do espaço euclidiano que preserva distâncias entre pontos é chamada de *isometria*. Prove que, se uma *isometria* do plano euclidiano fixa três pontos não colineares (isto é, esses três pontos não se movem), então a *isometria* fixa todos os pontos do plano.

Solução

Sejam A, B e C pontos fixos de uma isometria $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Vamos provar a forma contrapositiva da afirmação, isto é: se algum ponto é movido pela transformação I, então A, B, C são colineares.

Suponha que a isometria I move o ponto P para um ponto diferente P', isto é:. $I(P) = P'$. Seja l a mediatriz do segmento que liga o ponto P ao ponto P'. Como a distância do ponto A ao ponto P é igual a distância de A ao ponto P', concluímos que o ponto A está sobre a mediatriz l. Com raciocínio análogo, podemos concluir que os pontos B e C estão sobre a mediatriz l. Portanto, os pontos A, B e C são colineares.