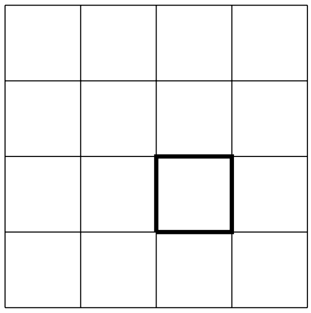
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 03 - DATA 19/03/2018

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Um professor distribui uma folha de papel quadriculado com o desenho de um quadrado e desafia cada estudante a desenhar, usando somente um lápis e uma régua sem marcação, um quadrado que tenha:

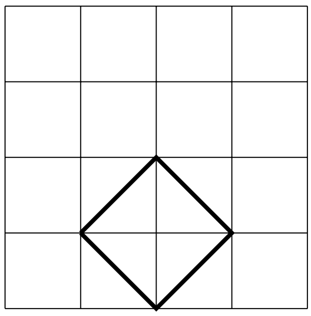
(a) o dobro da área do quadrado dado. (b) o quíntuplo da área do quadrado dado.



Diga, justificando, se os estudantes conseguirão realizar a tarefa.

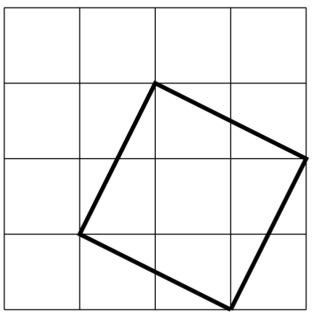
Solução

(a) Sim. Basta desenhar o quadrado como na figura a seguir.



Observe que a região limitada pelo quadrado desenhado acima é formada por 4 metades de um quadradinho do papel quadriculado, tendo, portanto, área igual a duas vezes a área de um quadradinho.

(b) Sim. Basta desenhar o quadrado com na figura a seguir.



Observe que a região limitada pelo quadrado desenhado acima é formada pela região limitada por um quadradinho e mais 4 regiões limitadas por triângulos retângulos congruentes. Cada triângulo tem área igual a de um quadradinho do papel quadriculado, pois é a metade de um retângulo formado por dois quadradinhos. Portanto, a área total da região limitada pelo quadrado desenhado acima é igual a 5 vezes a área de uma quadradinho do papel quadriculado.

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

Diga, justificando, se é possível escrever numa folha de papel mais do que 50 números naturais com dois dígitos sem que haja dois deles cuja soma seja igual a 100.

Solução

Não, não é possível. Observe que existem 40 pares de números naturais positivos, cada membro do par entre 10 e 100, de tal maneira que a soma dos elementos de cada par seja 100:

$$(10,90),\ (11,89),\ (12,88),\ \ldots,\ (49,51)$$

Agora, observe que foram deixados fora da lista acima os 10 números seguintes:

$$50,\ 91,92,\ 93,\ 94,\ 95,96,\ 97,98,\ ,99.$$

Assim, se tomarmos os 10 números acima e de cada par listado acima escolhermos um dos números que o compõe, ficaríamos com exatamente 50 números naturais com dois dígitos sem que haja dois deles cuja soma seja igual a 100. Agora, escolhendo qualquer número maior do que 50, necessariamente teremos que escolher no mínimo um dos pares acima, o que implicaria a existência de dois números cuja soma seria igual a 100. Portanto, é ímpossível.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

Um número inteiro positivo n é chamado de *fantasiado* se ele pode ser escrito na forma

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_{100}},$$

onde $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{100}$ são números inteiros não negativos que não são necessariamente distintos.
Encontre o menor número inteiro positivo n para o qual nenhum múltiplo de n é um número *fantasiado*.

Solução

A resposta é $n = 2^{101} - 1$.
Seja k um número inteiro positivo qualquer menor do que $2^{101} - 1$. Então n pode ser expresso na notação binária usando no máximo 100 dígitos 1. Logo, existe um número inteiro positivo r e números inteiros positvos $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r$, com $r \leq 100$, para os quais $k = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_r}$.
Observe que, para um número inteiro positivo s, temos:

$$2^s \cdot k = 2^s \cdot (2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_r}) = 2^{a_1+s} + 2^{a_2+s} + \ldots + 2^{a_{r-1}+s} + 2^s \cdot 2^{a_r} \qquad (*)$$

Agora, observe que, como $2^s - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{s-1}$, temos que $2^s = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{s-1}$.
Assim, podemos reescrever $(*)$ como:

$$2^s \cdot k = 2^{a_1+s} + 2^{a_2+s} + \ldots + 2^{a_{r-1}+s} + 2^{a_r} + 2^{a_r} + \ldots + 2^{a_{r-1+s}} + (1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{s-1}) \cdot 2^{a_r},$$

que é o mesmo que escrever:

$$2^s \cdot k = 2^{a_1+s} + 2^{a_2+s} + \ldots + 2^{a_{r-1}+s} + 2^{a_r} + 2^{a_r} + \ldots + 2^{a_{r-1+s}} + 2^{a_r} + 2^{a_r} + 2^{a_r+1} + \ldots + 2^{a_r+s-1}.$$

Ora, a expressão acima mostra que k possui um múltiplo que é a soma de $r+s$ potências de 2. Em particular, podemos tomar $s = 100 - r \geq 0$, o que mostra que k possui um múltiplo *fantasiado*.
Vamos mostra a seguir que nenhum múltiplo de $n = 2^{101} - 1$ é um número *fantasiado*.
Na verdade, vamos provar um resultado mais forte, a saber:
"Nenhum múltiplo de n pode ser expresso como a soma de no máximo 100 *potências de* 2".
Vamos fazer a prova por contradição. Vamos supor que exista um inteiro positivo c tal que cn seja a soma de no máximo 100 potências de 2. Podemos supor que c é o menor de tais números inteiros. Ao juntar na representação de cn (várias vezes se necessário) potências de dois iguais podemos assumir que

$$cn = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_r},$$

onde $r \leq 100$ e $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ são números inteiros não negativos distintos. Consieramos dois casos:

- Se $a_r \geq 101$, então temos $2^r - 2^{a_r - 101} = 2^{a_r-101} \cdot n$, o que implica que $2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_{r-1} + 2^{a_r-101}}$ seria um múltiplo de n menor do que cn, que é uma contradição pela minimalidade de c.

- Se $a_r \leq 100$, então $a_1\ a_2, \ldots, a_r$ é um subconjunto próprio de $\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$. Logo, temos que

$$n \leq cn < 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{100} = n,$$

  que é uma contradição.

Das duas contradições, podemos concluir que é impossível que cn seja a soma de no máximo 100 potencias de 2. Em particular, nenhum múltiplo de n é um número fantasiado.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Dois números inteiros distintos, m e n, possuem os mesmos primos nas respectivas decomposições em fatores primos. Sabe-se que os números $m+1$ e $n+1$ possuem a mesma propriedade. A quantidade de pares (m, n) com esta propriedade é finita ou infinita?

Solução

A quantidade de tais pares é infinita.
Seja $m = 2^k - 2$ e $n = (m+1)^2 - 1$, para $k = 2, 3, 4, 5, \ldots$. Assim, temos $(n+1) = (m+1)^2$, o que implica que $m+1$ e $n+1$ possuem os mesmo primos nas respectivas decomposições em fatores primos. Por outro lado, $n = (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m = m(m+2)$. Como, tomamaos $m = 2^k - 2$, segue que $m + 2 = 2^k$. Além disso, por escolha, m é um número par. Isto significa dizer que m e n possuem os mesmos fatores primos.