OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE

SOLUÇÃO DA LISTA SEMANAL Nº 04 - DATA 26/03/2018

PROBLEMA PARA O NÍVEL I

Num país distante, a moeda do sistema monetário é o **Paus**. Nesse sistema monetário, existem cédulas de $P\$2,00$ (dois *paus*), $P\$\ 3,00$ (três *paus*) e $P\$5,00$ (cinco *paus*). Diga, justificando, se as duas seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
(a) Qualquer valor inteiro em *paus*, começando com $P\$4,00$, pode ser pago usando somente cédulas de $P\$2,00$ e $P\$5,00$.
(b) Qualquer valor inteiro em *paus*, começando com $P\$8,00$, pode ser pago usando somente cédulas de $P\$3,00$ e $R\$5,00$.

Solução

(a) A resposta é sim.. Qualquer quantidade par de *paus* pode ser pago com cédulas de $P\$2,00$, e qualquer quantidade ímpar maior do que ou igual a $P\$5,00$ pode ser paga com uma cédula de $P\$5,00$ e várias de $P\$2,00$.
(b) A resposta é sim. Inicialmente, observe que as quantidades de 8, 9 e 10 *paus* podem ser pagas da maneira seguinte:

$$8 = 3 + 5, \qquad 9 = 3 + 3 + 3, \qquad 10 = 5 + 5.$$

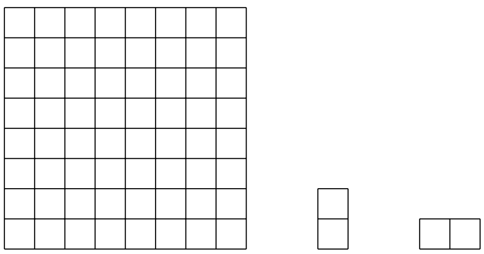
Agora, qualquer quantidade acima de $P\$10,00$ pode ser paga juntando uma quantidade suficiente de cédulas de $P\$3,00$ às quantidades 8, 9 ou 10 *paus*. Por exemplo:

$$11 = 8 + 3, \quad 12 = 9 + 3, \quad 13 = 10 + 3, \quad 14 = 8 + 3 + 3, \quad 15 = 9 + 3 + 3, \quad 16 = 10 + 3 + 3,$$

$$17 = 8 + 3 + 3 + 3, \quad 18 = 9 + 3 + 3 + 3, \ e\ assim\ por\ diante.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL II

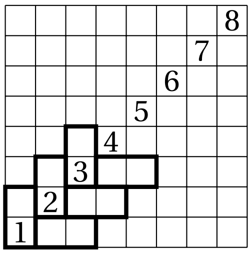
Cobre-se um tabuleiro 8×8 com peças de 1×2 (ou 2×1) de um jogo de dominó.



Mostre que, não importa como se cobre o tabuleiro, sempre vai ter duas peças do dominó formando um quadrado 2×2.

Solução

Numere de 1 a 8 as casas da diagonal do tabuleiro, que vai do canto inferior esquerdo para o canto superior direito, veja figura a seguir.



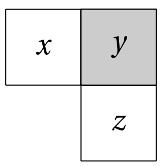
A casa numerada com 1 será coberta por algum dominó; por exemplo, na figura acima, é um dominó colocado na posição vertical. Se a casa à direita da casa marcada com 1 e adjacente a ela for coberta por uma peça colocada na vertical, teremos aí um quadrado 2×2 coberto por duas peças do dominó, o que resolve o problema. Caso contrário, esta casa será coberta por uma peça do dominó colocado na horizontal.
Agora, examinemos a casa numerada com o número 2. Se ela é coberta por uma peça do dominó colocada na horizontal, juntando a peça colocada horizontalmete e adjacente à casa numerada com o númeor 1, teremos um quadrado 2×2 coberto por duas peças do dominó, o que resolve o problema. Caso contrário, esta casa será coberta por uma peça do dominó colocada verticalmente. Aseguir, examinamos a casa numerada com o número 3, aplicando o mesmo racocínio. Com isso constrímos uma figura que lembra uma árvore de natal formada por peças de dominó e no final teremos um quadrado 2×2 antes ou quando atingirmos o canto superior direito do tabuleiro.

PROBLEMA PARA O NÍVEL III

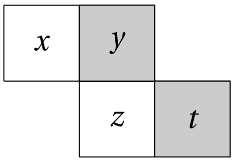
Greg preencheu as casas de um tabuleiro de xadrez (8×8) com os números $1, 2, 3, \ldots, 63, 64,$ um número por casa, em alguma ordem, e fala para Linda, para cada retângulo composto de duas casas, a soma dos números nelas escritas. Ele acrescenta que os números 1 e 64 estão na mesma diagonal.
Prove que esta informação é suficiente para Linda identificar precisamente os números em todas as casas do tabuleiro.

Solução

Suponha que Linda possui muitas peças de dominó 2×1 (cada peça de dominó cobrindo perfeitamente duas casas do tabuleiro). Se ela coloca duas peças sobre o tabuleiro de modo que elas cobrem extamente uma casa em comum, digamos que as duas peças cobrem as casas $x - y$ e $y - z$, veja figura a seguir.



Agora, Linda subtrai a soma dos números escritos nas casas cobertas pelo dominó $y - z$, que notamos por $y + z$, da soma dos números escritos nas casas cobertas pelo dominó $x - y$, que notamos por $x + y$, encontrando como valor a diferença $x - z$. Observe que as casas cobertas por x e z, respectivamente, possuem a mesa cor (admitindo que o tabuleiro apresente suas casas pintadas alternadamente de branco e preto).
A próxima peça de dominó que Linda coloca unirá uma casa coberta por um único dominó com uma casa ainda não coberta - digamos, o dominó $z - t$, veja na figura a seguir.



Somando a diferença obtida acima com a soma dos números cobertos pelo nova peça de dominó, Linda obterá a soma $x+t$ dos números nas casas agora cobertas por um único dominó e que possui cores opostas. Procedendo desta maneira, Linda pode somar os números das casas cobertas por outros dominós para construir uma cadeia ligando quaisquer duas casas. Se essas casas são da mesma cor, ela conhece sua diferença, caso contrário, sua soma.
Por outro lado, ela sabe que os números 1 e 64 estão escritos na mesma diagonal, e portanto estão escritos em casas da mesma cor. A diferença desses dois números é 63, considerando que a diferença entre dois inteiros entre 1 e 64 é menor do que 63. Portanto, Linda pode determinar qual das casas contém 1 e 64. Agora, conhecendo a soma (ou a diferença entre) 64 e o número escrito em qualquer outra casa, ela pode determinar a posição de todos os números.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Seja $1;\ 4;\ 8;\ 9;\ 16;\ 27;\ 32;\ \ldots$ a seqüência das potência dos números naturais com um expoente de no mínimo 2. Prove que existem progressões aritméticas, arbitrariamente longas (não contantes), com termos desta seqüência, mas não se pode encontrar uma tal progressão que é infinita.

Solução

Inicialmente, podemos observar que na sequência dada, temos uma progressão aritmética com três termos: $1,\ 5^2,\ 7^2$ (com razão $d = 5^2 - 1 = 24 = 7^2 = 5^2$). Outra progressão artimética, também com três termos, é formada pelos números $28^2,\ 42^2,\ 14^3$ (com razão $d = 42^2 - 28^2 = (42-28)\cdot(42+28) = 14\cdot 70 = 980 = 14^3 - 42^2$).
Agora, vamos mostrar que podemos ter uma progressão aritmética com qualquer número de termos da sequência dada.
De fato, se tivermos a progressão aritmética $n^{k_1},\ n^{k_2},\ \ldots,\ n^{k_s}$ com razão d, então tomando $k = MMC(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s)$ e $n = n_s^{k_s} + d$, os números

$$n^k \cdot n_1^{k_1},\ n^k \cdot n_2^{k_2},\ \ldots,\ n^k \cdot n_s^{ks},\ n^{k+1}$$

são as $s+1$ potências com expoentes no mínimo 2 formando uma progressão aritmética com razão igual a

$$n^k \cdot n_{i+1}^{k_{i+1}} - n^k \cdot n_i^{k_i} = n^k \cdot (n_{i+1}^{k_{i+1}} - n_i^{k_i}) = n^k \cdot d.$$

Assim, por indução, pode-se obter uma progressão aritmética com a quantidade de termos que quiser.
No entanto, uma progressão aritmétca infinita não existe. De fato, se tivéssemos $n_j^{k_j} = aj + b$, para todo $j \geq 1$, então teríamos:

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{n_j^{k_j}} = \sum_{j\geq 1} \frac{1}{aj+b} = \infty$$

Por outro lado, temos

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{n_j^{k_j}} < 1 + \sum_{n\geq 2} \sum_{k\geq 2} \frac{1}{n_k} = 1 + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$