**XXIX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - 20/10/2018**

---

**SEGUNDA ETAPA - PROVA DO NÍVEL I**

**PROBLEMA 1**

Considere as 205 frações seguintes:

$$\frac{2}{206}, \frac{3}{205}, \frac{4}{204}, \ldots, \frac{204}{4}, \frac{205}{3}, \frac{206}{2}.$$

Diga, justificando, se é possível escolher **3** frações distintas cujo produto seja igual a 1.

**Solução**

Sim, é possível.
Observe que a soma do numerador e numerador de cada uma das frações dadas é igual a 208. Dentre as frações dadas, existe a fração $\frac{104}{104} = 1$.
Várias respostas são possíveis. Por exemplo, podemos escolher as frações $\frac{3}{205}$, $\frac{205}{3}$, $\frac{104}{104}$, cujo produto é igual a 1: $\frac{3}{205} \cdot \frac{205}{3} \cdot \frac{104}{104} = 1$.

**PROBLEMA 2**

André diz um número inteiro positivo. Beatriz multiplica-o por 4 ou 8. Carla multiplica o resultado obtido por Beatriz por 3 ou 6. Danilo multiplica o resultado obtido por Carla por 7 ou 9. Evandro multiplica o resultado obtido por Danilo por 7 ou 8, obtendo o resultado final 2016.
Qual foi o número dito por André?

**Solução**

A resposta é 3.
Observe que a decomposição de 2016 em fatores primos é

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Seja $a$ o número dito por André. Assim, quando multiplicamos $a$ por 4 ou 8, depois por 3 ou 6, em seguida por 7 ou 9 e, finalmente, por por 7 ou 8, obtemos 2016.
Como Carla multiplicou o resultado obtido por Beatriz por 3 ou 6, ela acrescentou um fator 3 ao produto. Isto significa que Danilo não multiplicou por 9 o resultado obtido por Danilo, pois, se assim fosse, teríamos acrescentado três fatores 3 ao produto final, o que não é possível pois temos somente $3^2$ na decomposição em fatores primos de 2016. Logo, Danilo multiplicou por 7 o resultado obtido por Carla. Desse modo, Evandro não multiplicou o resultado obtido por Danilo por 7 e sim por 8.
Sejam $b$, $c$ os números multiplicados por Beatriz e Carla, respectivamente. Desse modo, temos:

$$a \cdot b \cdot c \cdot 7 \cdot 8 = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad (*)$$

onde $b \in \{4,\ 8\}$ e $c \in \{3,\ 6\}$. Agora, observe que se $b = 8$, o lado esquerda da igualdade acima seria múltiplo de 64, enquanto 2016 não é. Isto implica que $b = 4$. Substituindo em $(*)$, teremos:

$$a \cdot 4 \cdot c \cdot 7 \cdot 8 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow a \cdot c = 9,$$

o que implica que a única possibilidade é $a = c = 3$. Portanto, o número dito por André foi 3.

**PROBLEMA 3**

Num país distante, a moeda do sistema monetário é o Paus. Nesse sistema monetário, existem cédulas de $P\$2,00$ (dois paus), $P\$3,00$ (três paus) e $P\$5,00$ (cinco paus).
Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

*Qualquer valor inteiro em paus, começando com $P\$8,00$, pode ser pago usando somente cédulas de $P\$3,00$ e $P\$5,00$.*

**Solução**

A resposta é sim.
Inicialmente, observe que as quantidades de 8, 9 e 10 paus podem ser pagas da maneira seguinte:

$$8 = 3 + 5, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 10 = 5 + 5.$$

Agora, qualquer quantidade acima de $P\$10,00$ pode ser paga juntando uma quantidade suficiente de cédulas de $P\$3,00$ às quantidades 8, 9 ou 10 paus. Por exemplo:

$$11 = 8 + 3, \quad 12 = 9 + 3, \quad 13 = 10 + 3, \quad 14 = 8 + 3 + 3, \quad 15 = 9 + 3 + 3, \quad 16 = 10 + 3 + 3,$$
$$17 = 8 + 3 + 3 + 3, \quad 18 = 9 + 3 + 3 + 3,$$

Seja $K \in \mathbb{Z}$ tal que $K > 10$. Dividindo $Q$ por 3 temos três possibilidades, a saber:

$$K = 3r, K = 3s + 1, K = 3t + 2, \ com\ r,\ s,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Se $K = 3r$, temos que $K$ é um múltiplo de 3 e, portanto, essa quantidade pode ser paga utilizando apenas cédulas de $P\$3,00$.
No caso em que $K = 3s + 1$, podemos escrever

$$K = 3s + 1 + 10 - 10 = 3s - 9 + 10 = 3(s - 3) + 10$$

Nesse caso, como $10 = 5 + 5$ e $3(s - 2)$ é múltiplo de 3 essa quantidade pode ser paga usando apenas cédulas de $P\$5,00$ e de $P\$3,00$ .
Por fim, se $K = 3t + 2$, podemos escrever

$$K = 3t + 2 = 3t + 2 + 8 - 8 = 3q - 6 + 8 = 3(q - 1) + 5$$

Nesse caso, a quantia $K$ pode ser paga usando cédulas de $P\$5,00$ e de $P\$3,00$. Dessa forma, qualquer quantia $Q \geq 8$ paus dode ser paga utilizando apenas cédulas de $P\$5,00$ e de $P\$3,00$.

**PROBLEMA 4**

Escrevem-se os números 1, 4, 8, 10 em casas de um tabuleiro $3 \times 3$, veja Figura a seguir.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | |
| | | 10 |
| 4 | | |

Queremos escrever números inteiros positivos em cada uma das casas vazias de modo que satisfaçam as duas condições seguintes:

- Os nove números no tabuleiro sejam distintos.
- A soma dos quatro números em qualquer sub-tabuleiro $2 \times 2$ seja sempre a mesma.

Determine o menor valor que pode assumir soma dos nove números possíveis.

**Solução**

A resposta é 51.
Vamos preencher as casas vazias do tabuleiro com os números $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, veja Figura a seguir.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | a |
| b | c | 10 |
| 4 | d | e |

Observe que a soma dos números escritos nas casas de qualquer sub-tabuleiro $2 \times 2$ deve ser igual a

$$8 + a + c + 10 = 18 + a + c.$$

Assim, temos que $1+8+b+c = 18+a+c \Rightarrow b = a+9$. Por outro lado, como $a+9+c+4+d = 18+a+c$, temos que $d = 5$. Do mesmo modo, como $c + 10 + d + e = 18 + a + c$, temos que $e = a + 3$.
Agora, observe que $a \neq 1$ e $c \neq 1$, pois, caso contrário teríamos duas casas prenchidas com dois números iguais, que é contrário à hipótese. Do mesmo modo, $a \neq 2$, pois, caso contrário, teríamos duas casas preenchidas com 5. Logo, $a \geq 3$ e $c \geq 2$.
A soma de todos os números escritos nas casas do tabuleiro é igual a

$$1 + 8 + a + (a + 9) + c + 10 + 4 + 5 + a + 3 = 3a + c + 40 \geq 3 \cdot 3 + 2 + 40 = 51.$$

Portanto, o menor valor que pode assumir soma dos nove números possíveis é 51.