XXIX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - 20/10/2018

SEGUNDA FASE - PROVA DO NÍVEL II

PROBLEMA 1

As cadeiras de um auditório estão distribuídas em m filas e n colunas. Durante uma atividade observou-se que em cada fila havia precisamente dois assentos vazios e em cada coluna havia somente um assento vazio.
Encontre a quantidade total de cadeiras do auditório sabendo que esta quantidade é maior do que 650 e menor do que 750.

Solução

A resposta é 722.
Seja V a quantidade total de assentos vazios. A ideia é contar esta quantidade de duas maneiras distintas:

- Como existem m filas e em cada uma existem extamente duas cadeiras vazias, segue que $V = 2m$.
- Como existem n colunas e em cada uma existe somente uma cadeira vazia, segue que $V = n$

Logo, temos que $V = 2m = n$. Por outro lado, a quantidade total de cadeiras no auditório é igual a $m \cdot n = m \cdot 2m = 2m^2$. Como, por hipótese, o total de cadeiras do auditório é maior do que 650 e menor do que 750, segue que

$$650 < 2m^2 < 750 \Rightarrow 325 < m^2 < 375.$$

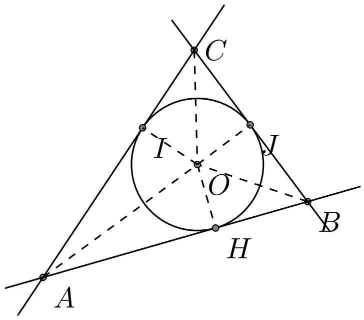
Logo, Portanto, $m^2 = 19^2 = 361$, pois este é o único quadrado perfeito neste intervalo.
Portanto, a quantidade total de cadeiras do auditório é $V = 2m^2 = 2 \cdot 361 = 722$.

PROBLEMA 2

No oceano Atlântico, uma ilha possui a forma de um triângulo. Diga, justificando, qual é o ponto O da ilha mais afastado do mar.

Solução

O ponto O da ilha mais afastado do mar é o centro do círculo inscrito na ilha triangular.
Seja ΔABC a representação da ilha e r o raio do círculo inscrito no ΔABC, veja Figura a seguir.



Temos que: $\overline{OH} = \overline{OI} = \overline{OJ} = r$.
Suponha que na ilha (na região limitada ΔABC) existe um ponto P que é mais distante dos lados do triângulo do que o ponto O.
Sejam $d(A,B)$, $d(A,C)$ e $d(B,C)$ as distância do tal ponto P aos lados AB, AC e BC, respectivamente. Por hipótese, temos que:

$$d(A,B) > r, \quad d(A,C) > r \ \ e \ \ d(B,C) > r.$$

Logo, a área do ΔABC, que denotamos por $S(\Delta ABC)$, pode ser escrita como:

$$S(\Delta ABC) = S(\Delta AOB) + S(\Delta BOC) + S(\Delta AOC) = \frac{\overline{AB} \cdot r + \overline{BC} \cdot r + \overline{CA} \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}).$$

Por outro lado, temos que a área do ΔABC pode ser escrita a partir de P como:

$$S(\Delta ABC) = S(\Delta APB) + S(\Delta BPC) + S(\Delta APC) > \frac{\overline{AB} \cdot r + \overline{BC} \cdot r + \overline{CA} \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}),$$

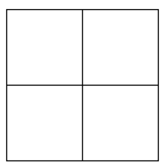
que é uma contradição com o que obtivemos acima. Esta contradição provém do fato de que existe um ponto cuja soma das distâncias aos lados do triângulo é maior do que r.

PROBLEMA 3

Cinco carneiros pastam em um terreno quadrado de $20m$ de lado. Um observador nota que, em qualquer momento, pelo menos dois carneiros estão a uma distância entre si menor que $15m$. Explique porque o observador está correto!

Solução

Imagine a região limitada por um quadrado de lado $20\ m$ dividida em quatro regiões quadradas de lado $10\ m$, traçando-se pelos pontos médios dos lados segmentos paralelos aos lados do quadrado original, veja Figura a seguir.



Em cada um desses quadrados, a distância máxima entre dois pontos corresponde ao comprimento de uma das suas diagonais, que é $10\sqrt{2}\ m$. Ora, como são 5 carneiros, e só são 4 regiões quadradas, segue que havaré pelo menos uma região quadrada com dois carneiros e, portando, sempre haverá pelo menos dois carneiros cuja distância máxima entre eles é $10\sqrt{2}m$. Por outro lado, como $10\sqrt{2} < 15$, segue que sempre haverá pelo menos dois carneiros cuja distância máxima entre eles é menor que $15\ m$.

PROBLEMA 4

Um garoto possui 101 moedas, colocadas em fila. As moedas são de 10, 20 ou 50 centavos. Sabe-se que não existe um grupo de moedas consecutivas cuja soma seja igual a 60 centavos.
Qual é a menor quantidade de moedas de 50 centavos que o garoto pode ter?

Solução

OBSERVAÇÃO - Na prova, o Problema 4 tinha uma imprecisão no enunciado, por isso foi ANULADO e, na correção, os pontos da questão serão distribuídos igualmente para as 3 outras questões.
A resposta é 16.
Vamos demonstrar que entre quaisquer 6 moedas consecutivas existe pelo menos uma moeda de 50 centavos.
Suponha o contrário, isto é, existem 6 moedas consecutivas nenhuma das quais é uma moeda de 50 centavos.

- Se a hipótese for verdadeira, vamos supor que entre quaisquer 6 moedas exista exatamente uma moeda de 20 centavos. Neste caso, pegamos um bloco de 5 moedas consecutivas que contenha a moeda de 20 centavos. Logo, a soma dessas cinco moedas é exatamente igual a $10+10+10+10+20=60$, que é uma contradição com a hipótese.
- Se a hipótese for verdadeira e existir um bloco com seis moeda tendo exatamente duas de 20 centavos, segue que deve existir à esquerda ou à direita dessa moeda uma de 10 centavos. Sem perda de generalidade, vamos supor que existe à esquerda uma moeda de 10 centavos. Neste caso, não deve existir mais moedas à direita. Então o grupo de 6 moedas termina com as moedas de 10, 20, 20. Logo, à esquerda da moeda de 10 centavos deve existir obrigatoriamente uma moeda de 20 centavos e à esquerda desta última moeda somente pode ter uma moeda de 20 centavos, o que nos permite concluir que as moedas neste grupo são: 20, 20, 10, $20, 20$. Com isso, concluímos que não se pode colocar uma moeda a mais à esquerda, o que é uma contradição pois o grupo tem 6 moedas.

Agora, como $101 = 6 \cdot 16 + 5$, segue que as moedas podem se dividir em grupos de 6 moedas cada um e sobrando 5 moedas. Portanto, como entre quaisquer seis moedas consecutivas existe uma de 50 centavos, entre as 101 deve haver pelo menos 16 moedas de 50 centavos.
No exemplo a seguir vemos que existe exatamente 16 moedas de 50 centavos dentre as 101:

$$20, 10,\ 10,\ 10,\ 20,\ 50,\ 20,\ 10,\ 10,\ 10,\ 20,\ 50, \ldots, 50,\ 20,\ 10,\ 10,\ 10,\ 20.$$