XXIX OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE - 20/10/2018

SEGUNDA ETAPA - PROVA DO NÍVEL III

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo é *irregular* se ele não é múltiplo de qualquer um de seus dígitos. Por exemplo, 394 é um número *irregular* porque não é múltiplo de 3, não é múltiplo de 9 e não é múltiplo de 4. Considere um conjunto formado por n números inteiros positivos consecutivos.
Se todos os números desse conjunto são *irregulares*, determine o maior valor possível para n.

Solução

A resposta é 5.
Inicialmente, observe que um número inteiro positivo que termina em 1, 2 ou 5 não é *irregular*. De fato, se o número termina em 1 é divisível por 1, se termina em 2 é par, portanto divisível por 2, se termina em 5 é múltiplo de 5.
Pelo que vimos acima, todo bloco de inteiros positivos consecutivos *irregulares* não possui qualquer número que termine em 1, 2 ou 5. Por outro lado, se o bloco de números inteiros positivos consecutivos *irregulares* estiver entre dois números, um terminando em 2 e outro em 5, possui no máximo dois números.
Agora, se o bloco de números inteiros positivos consecutivos *irregulares* estiver entre dois números, um terminando em 5 e outro em 1, possui no máximo 5 números. Portanto, um bloco de números inteiros positivos consecutivos *irregulares* tem no máximo 5 números.
Exemplos de 5 números inteiros positivos *irregulares*:

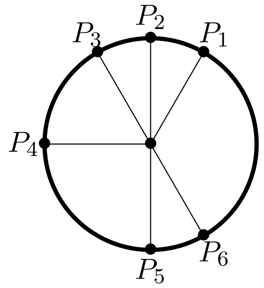
- 976, 977, 978, 979, 980.
- 866, 867, 868, 869, 870.

PROBLEMA 2

Dados quaisquer seis pontos sobre um círculo, demonstrar que sempre podemos encontrar dois deles cuja distância seja menor ou igual ao raio do círculo.
Diga, justificando, se o resultado vale para o caso de somente cinco pontos.

Solução

Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 os seis pontos sobre o círculo. Consideramos os seis raios do círculo que passam pelos seis pontos dados, veja Fgura a seguir.



Se existem dois pontos que pertencem a um mesmo raio, é fácil ver que a distância entre esses dois pontos é menor do que ou igual ao raio. Logo, podemos supor que todos estes raios são distintos.
Portanto, eles dividem o círculo em seis setores circulares cujos ângulos somam $360°$ (que é o círculo completo). Dentre os seis números que soman $360°$ haverá sempre um menor do que ou igual a $60°$, o que implica que existirão dois dos pontos que estão contidos num setor circular de ângulo $60°$ e, logo, a distância entre dois pontos dentro de tal setor é menor do que ou igual ao raio do círculo, como queríamos provar.
Com cinco pontos o resultado não é sempre verdadeiro. Um contraexemplo seriam os vértices de um pentágono regular inscrito no círculo dado: a distância entre dois deles é maior do que ou igual que ao comprimento do lado do pentágono, que é maior que o lado de um hexágono inscrito (que, por sua vez, é igual ao raio do círculo).

PROBLEMA 3

Sejam a, b e c as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 14x - 2 = 0$.

a)Prove que a, b e c são números reais positivos.

b)Calcule o valor da expressão $\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c)$.

Solução

a)Ora, como a é uma raíz da equação $3x^3 - 13x^2 + 14x - 2 = 0$, segue que

$$3a^3 - 13a^2 + 14a - 2 = 0 \Rightarrow 3a^3 + 14a = 13a^2 + 2.$$

Note que a não pode ser negativo, pois se fosse o primeiro membro da igualdade

$$3a^3 + 14a = 13a^2 + 2$$

seria negativo enquanto o segundo membro seria positivo, o que é impossível, visto que há uma igualdade entre os dois membros. Assim $a > 0$. Raciocinando de maneira completamente análoga, podemos concluir que $b > 0$ e $c > 0$.

b)Definindo $x = \arctan\ a$, $y = \ b$ e $z = \arctan\ c$ $(\tan\ x = a,\ \tan\ y = b,\ \tan\ z = c)$, segue que

$$\begin{aligned}
\tan(x+y+z) &= \tan[(x+y)+z] \\
&= \frac{\tan(x+y)+}{1-\tan(x+y)\tan\ z} \\
&= \frac{\frac{\tan\ x+\tan\ y}{1-\tan\ x\tan\ y}+\tan\ z}{1-\frac{(\tan\ x+\tan\ y)}{1-\tan\ x\tan\ y}.\tan\ z} \\
&= \frac{\tan\ x+\tan\ y+(1-\tan\ x\tan\ y)\tan\ z}{1-\tan\ x\tan\ y-(\tan\ x+\tan\ y)\tan\ z} \\
&= \frac{\tan\ x+\tan\ y+\tan\ z-\tan\ x\tan\ y\tan\ z}{1-\tan\ x\tan\ y-\tan\ x\tan\ z-\tan\ y\tan\ z}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\tan(\arctan\ a + \arctan\ b + \arctan\ c) = \frac{a+b+c-abc}{1-(ab+ac+bc)} \Rightarrow$$

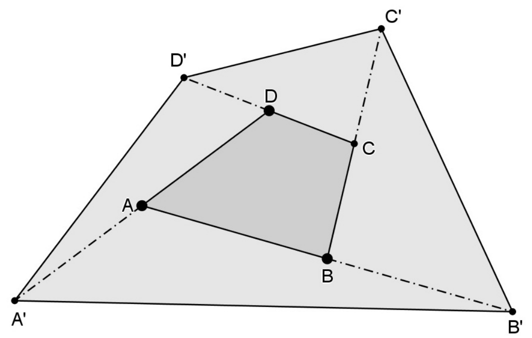
$$\arctan\ a + \arctan\ b + \arctan\ c = \left(\frac{a+b+c-abc}{1-(ab+ac+bc)}\right)$$

Por outro lado, pelas relações de Girard, segue que:

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{13}{3} \\ ab+ac+bc = \frac{14}{3} \ \ Assim, \\ abc = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} \arctan\ a + \arctan\ b + \arctan\ c = &\ \arctan\left(\tfrac{a+b+c-abc}{1-(ab+ac+bc)}\right) \\ = &\ \arctan\left(\tfrac{\frac{13}{3}-\frac{2}{3}}{1-\frac{14}{3}}\right) \\ = &\ \arctan(-1) \\ = &\ \tfrac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, considere um outro quadrilátero $A'B'C'D'$ tal que A é o ponto médio de $A'D$, B é o ponto médio de AB', C é o ponto médio de BC' e D é o ponto médio de CD'.

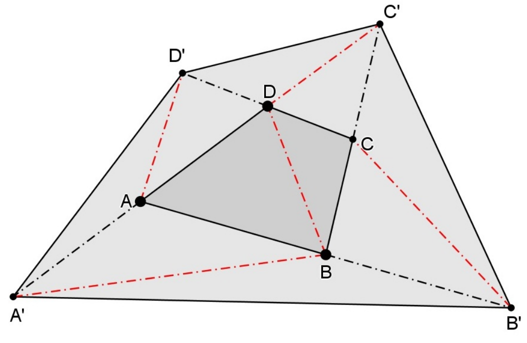


Se o símbolo ( ) representa a medida da área de uma figura plana, mostre que:

$$(A'B'C'D') = 5.(ABCD).$$

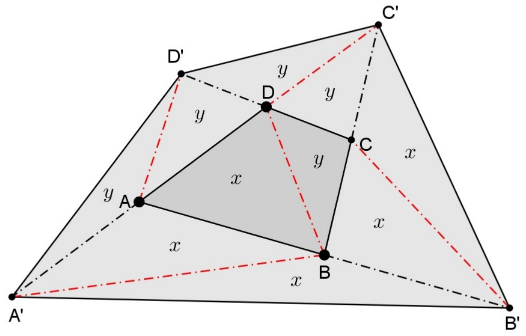
Solução

Inicialmente trace os segmentos AD', BA', CB', DC' e BD, conforme ilustra a figura abaixo



Sejam $(ABD) = x$ e $(BCD) = y$. Note que $(ADD') = (BCD) = y$ (pois esses triângulos têm bases e alturas de mesma medida). De modo análogo temos que $(DC'D') = (ADD') = y$, $(CC'D) = (DC'D') = y$ e $(AA'D') = (ADD') = y$. Por outro lado, $(ABD) = (AA'B) =$

x, $(BA'B') = (AA'B) = x$, $(BB'C) = (ABD) = x$ e $(CB'C') = (BB'C) = x$, conforme ilustra a figura a seguir



Diante do exposto, segue que $(ABCD) = x + y$ e $(A'B'C'D') = 5.(x + y) = 5.(ABCD)$.