Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte

2019

Conteúdo

1. Olimpíada de Matemática

O que é a Olimpíada de Matemática?

Uma Olimpíada de Matemática, regional, nacional ou internacional, é um torneio disputado por estudantes do Ensino Fundamental, Ensino Médio ou Ensino Universitário. Nesses torneios, cada estudante é desafiado a resolver problemas atraentes e desafiadores. Cada um participa usando como armas seu raciocínio, sua criatividade e sua disciplina mental.

A Olimpíada de Matemática é uma competição inspirada nos Jogos Olímpicos da Grécia antiga, iniciados no ano 776 a.C. e, na era moderna revividos a partir do ano de 1896, que por sua vez são inspirados nos festivais esportivos que os gregos realizavam na antiga Élida, em honra ao deus Zeus e de outros deuses que habitavam o Olimpo.

Esse tipo de atividade intelectual, que valoriza a competência e o saber, é uma demonstração de civilidade e avanço cultural. A história da humanidade comprova que as sociedades mais desenvolvidas têm cultivado esse sentimento de respeito pelas vitórias do espírito. Basta lembrar os que viviam nas épocas clássicas, onde os poetas eram coroados com os louros.

A realização das Olimpíadas de Matemática no mundo é um acontecimento que data do século XIX e, nos moldes atuais, são disputadas desde 1894, quando foram organizadas competições na Hungria. Nos últimos 60 anos, a Hungria produziu uma das maiores comunidades de grandes matemáticos do mundo. Esse fato é atribuído ao importante papel das competições matemáticas no sistema educacional da Hungria.

Com o passar dos anos, competições similares foram se espalhando pelo leste europeu, culminando, em 1959, com a organização da 1ª Olimpíada Internacional de Matemática, na Romênia, com a participação de países daquela região.

No Brasil, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em conjunto com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) promove, anualmente, desde 1979, a Olimpíada

Brasileira de Matemática (OBM), sob a coordenação da Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática. O IMPA tem sede na cidade do Rio de Janeiro-RJ e pertence ao Ministério da Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC). Todas as participações de estudantes brasileiros em competições matemáticas internacionais são coordenadas pela Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática.

Ao longo desses anos, a OBM passou por diversas mudanças em seu formato, mas manteve a ideia central que é a de estimular o estudo da Matemática nos alunos, desenvolver a aperfeiçoar a capacitação de professores, influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir jovens talentos.

A partir do ano de 2005, o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) realiza, anualmente, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado, com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC). A OBMEP visa estimular o estudo da Matemática e identificar talentos na área e tem como objetivos principais:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento

O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio. Em 2018, mais de 18 milhões de alunos em todo o País participaram da olimpíada.

No Estado do Rio Grande do Norte, a Olimpíada de Matemática vem sendo coordenada pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), através do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Terra. Inicialmente, a Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte (OMRN) foi realizada nos anos de 1985 e 1986, sob a Coordenação do Prof. Francisco Canindé de Oliveira, fortemente incentivado pelos Professores Martin Tygel, que nesta época era docente da UFRN, e pelo Prof. Cláudio Carlos Dias, docente do Departamento de Matemática. Depois disso, só voltamos a realizar a OMRN em 1992, sob a Coordenação do Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire, que ficou na Coordenação até sua aposentadoria em 2014. Em seguida, a Coordenação foi exercida pelo Prof. Carlos Alexandre Gomes da Silva em 2014 – 2015.

Também coordenada pela UFRN, através do Departamento de Matemática, realizamos desde de 2005 a OBMEP, nos dois primeiros anos coordenada pelo Prof. Benedito Tadeu Vasconcelos Freire e, posteriormente, coordenada pelo Prof. Joaquim Elias de Freitas, do Departamento de Matemática.

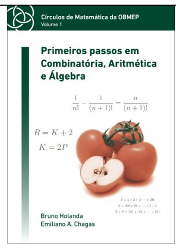
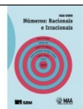
No ano de 2019, a Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte (OMRN) terá a sua $30^{\underline{a}}$ edição e pela primeira vez a OMRN terá 4 níveis:

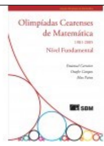
- **Nível I** - para estudantes do Ensino Fundamental, matriculados na $6^{\underline{a}}$ ou $7^{\underline{a}}$ série;
- **Nível II** - para estudantes do Ensino Fundamental, matriculados na $8^{\underline{a}}$ ou $9^{\underline{a}}$ série;
- **Nível III** - para estudantes matriculados no Ensino Médio.
- **Nível IV** - para estudantes universitários que ainda não tenham um curso de graduação.

2. Publicações

2.1 Publicações da SBM/IMPA

Como apoio às Olimpíadas de Matemática, em todos os seus níveis, a SBM e o IMPA publicaram várias coleções de livros interessantes que constituem excelente referências para aqueles que querem aperfeiçoar seus conhecimentos e melhorar a capacidade de resolver problemas. Os livros podem ser adquiridos no site da OBM: https://loja.sbm.org.br.

Coleção Círculos de Matemática da OBMEP	
Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra	
Coleção Iniciação Científica	
Números Irracionais e Transcendentes	
Números: Racionais e Irracionais	

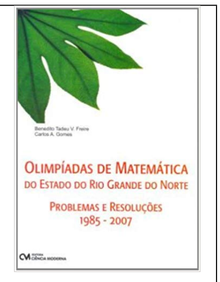
Coleção Olimpíadas de Matemática	
Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 1ª a 8ª	
Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 9ª a 16ª	
Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª	
Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções	
Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 - Nível Médio	

Coleção Círculos Matemáticos	
Círculos Matemáticos: A Experiência Russa	
Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana	

2.2 Outras Publicações

O interessado pode obter outras publicações em português (ou em inglês) no site: www.amazon.com. Por exemplo:

Olimpiadas de Matematica do Estado Rio Grande do Norte

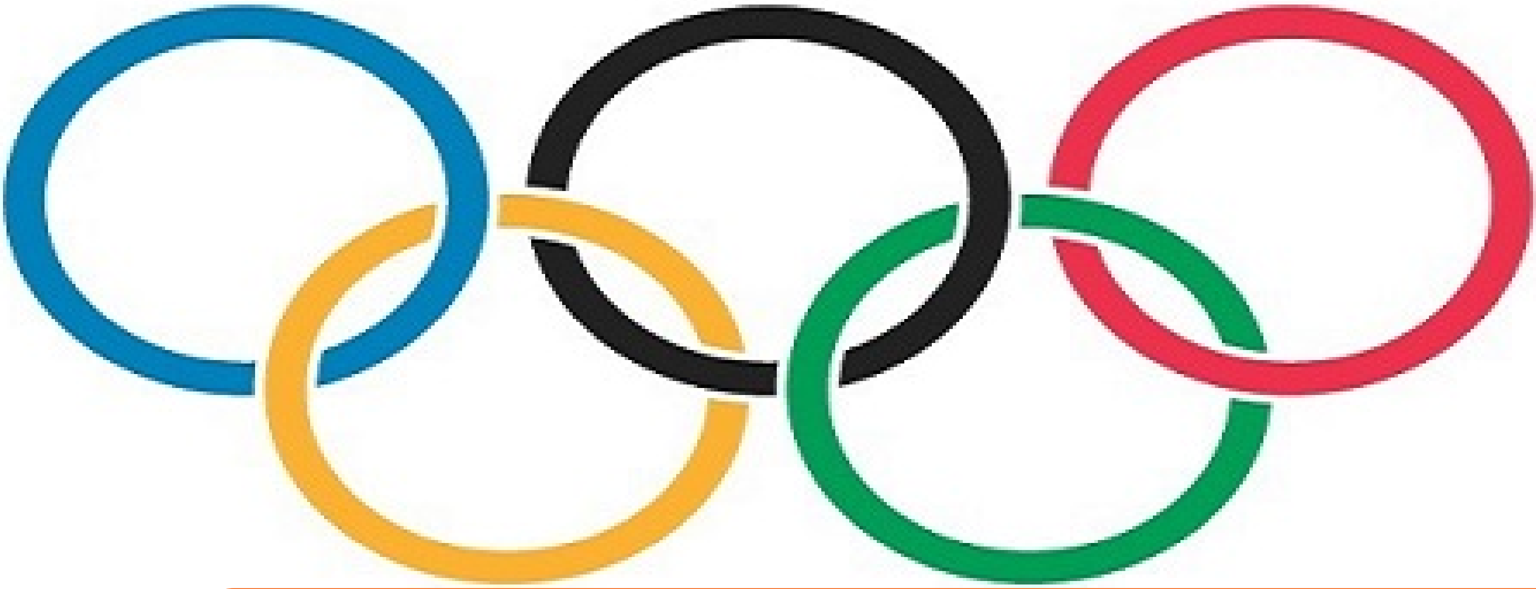


2.3 Outras Fontes

No site da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte (OMRN), o aluno encontra as provas dos anos anteriores (com as respectivas soluções), listas de problemas semanais (com as respectivas soluções) e outras informações que podem ajudar alunos e professores. O site da OMRN é: **https://olimpiada.mat.ufrn.br/**

Nos sites da OBM e OBMEP existem muitas informações úteis:

- OBM: www.obm.org.br
- OBMEP: www.obm.org.br



3. Preparação para as Olimpíadas

3.1 Resolução de Problemas

O estudante que participa da Olimpíada de Matemática é desafiado a resolver problemas intrigantes, atraentes e desafiadores. Logo, ele tem de melhorar continuamente sua formação, aperfeiçoar sua capacidade de pensar de forma organizada e produtiva. O aperfeiçoamento do ato de pensar requer o uso de exercícios específicos que darão aos alunos oportunidade de praticar um raciocínio lógico. A solução de provas anteriores de várias olimpíadas de Matemática ajudam a melhorar a formação ao mesmo tempo que treinam o estudante na solução de problemas. Mais adiante, apresentaremos listas de problemas para os diversos níveis, que esperamos os alunos tentem resolvê-los e, posteriormente, leiam as soluções. Os problemas que apresentamos adiante foram selecionados dentre os belos problemas de olimpíadas de Matemática ao redor do mundo.

Quando for resolver um problema, adote alguns cuidados que podem melhorar sua capacidade de resolvê-los:

- Entenda, antes de fazer. Isto é, leia bem o problema, se possível mais de uma vez, até saber exatamente quais são as suas hipóteses e o que, exatamente, o problema pede.
- Faça a si as perguntas: essa questão é parecida com alguma outra que eu conheço? Como posso adaptar a solução do outro problema para resolver este?
- Trace um plano para resolvê-lo. Se você já tem algumas estratégias possíveis para atacar o problema, a tarefa a seguir é meditar sobre as suas ideias e deixar que o seu subconsciente trabalhe, a seu gosto, esse amontoado de ideias que você preparou para ele. É aconselhável que você faça uma lista das melhores ideias, a princípio sem misturá-las.
- Explore cada ideia da lista com decisão e confança, de forma ordenada, em paz, sem

precipitações. Se, ao colocar em prática uma ideia, lhe ocorrer outra, totalmente desligada da primeira, e que você avalia que pode lhe ajudar, não vá desprezá-la. Coloque-a na sua lista. Mas, também não desvie sua atenção da que agora está explorando.
- Um ponto importante que deve sempre ser lembrado: você não pode desistir facilmente. Por outro lado, não deve teimar demais só com uma ideia. Se as coisas complicarem demais, haverá provavelmente outro caminho. Um caminho que foi muito usado na história de matemática foi o da tentativa e erro, tentativa e erro, tentativa e erro, você não pode esquecer este fato!
- Ao concluir sua resolução, você precisa ter certeza que sua resposta é a procurada. Reveja sua solução com cuidado.

É importante o aperfeiçoamento da habilidade de resolver problemas porque o estudante se capacita não apenas a resolver problemas de matemática, mas também como trabalhar logicamente todas as questões que a vida nos impõe. Com issso, ele pode resolver problemas que ela nunca viu antes, tornando-se flexível diante das dificuldades e, acima de tudo, ele pode criar soluções originais.

3.2 Atitude dos Alunos Durante a Realização das Provas

Durante a realização das provas, espera-se que o estudante:
- Analise e compreenda a instrução para resolver ou provar (dados, relacionamentos entre dados, condições, pressupostos, conhecimento matemático necessário, etc.)
- Proceda com o rigor adequado e precisão, de forma fundamentada.
- Use argumentos, explicações e justificativas, raciocínio explícito e consistente.
- Se possível, use diferentes métodos de demonstração com base no contexto matemático.
- Use a linguagem, notação e símbolos matemáticos adequados ao contexto.
- Produza ou crie modelos matemáticos adequados que permitem a resolução do problema.

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

4. CALENDÁRIO 2019

4.1 OBMEP

As datas das provas da OBMEP-2019 são as seguintes:

- Prova da Primeira Fase: 21 de maio (terça-feira)
- Prova da Segunda Fase: 28 de setembro (sábado)

Divulgação dos premiados: 03/12, na página da OBMEP: www.obmep.org.br

4.2 OBM

Para a OBM-2019, serão indicados até 5 alunos de cada nível (exceto o nível Universitário- qualquer aluno universitário que ainda não tenha terminado um curso de graduação pode fazer). Para os níveis I, II e III O critério de indicação será a classificação final da OMRN-2019.
As datas das provas da OBM-2019 são as seguintes:

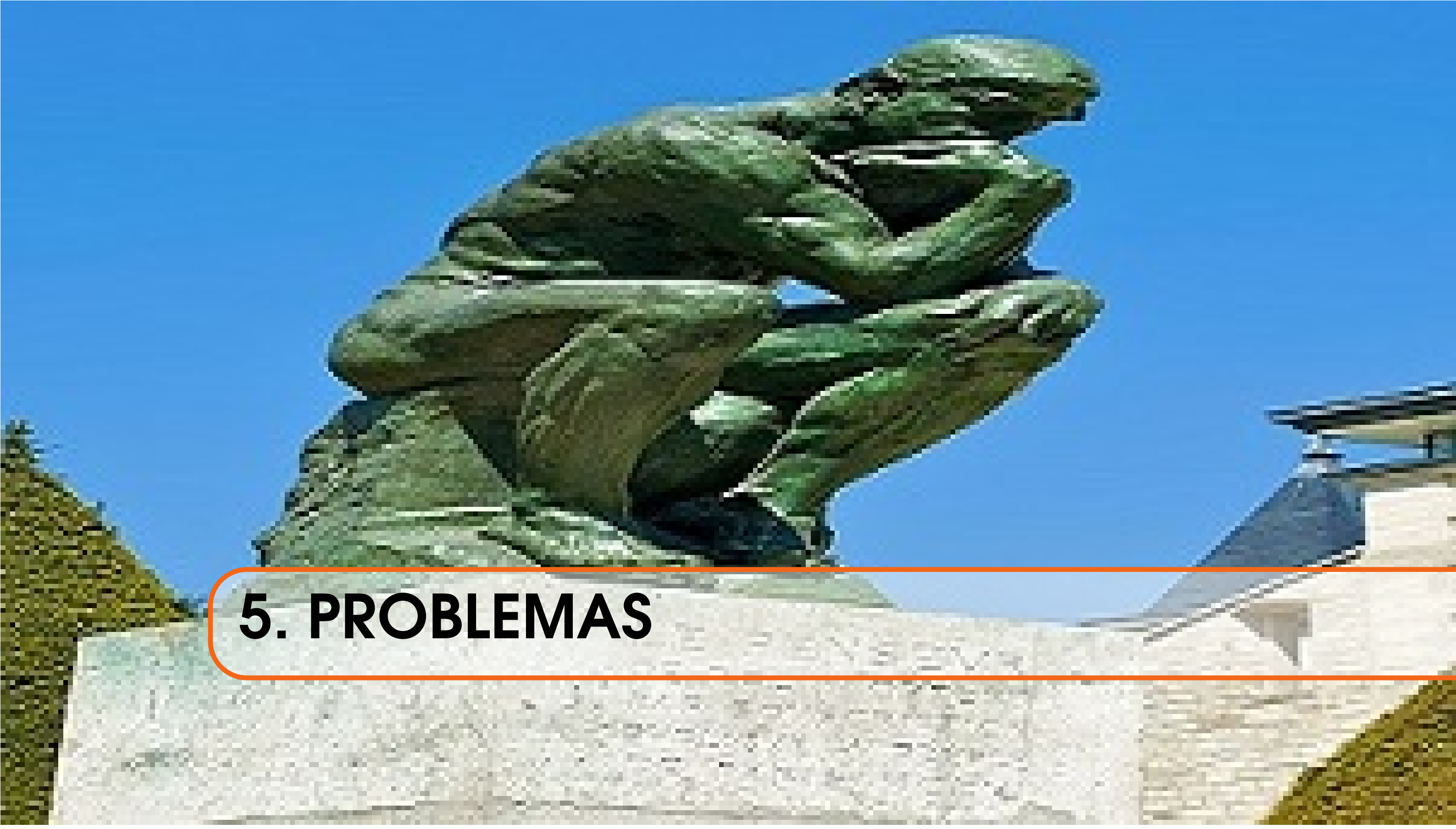
- Prova da Primeira Fase (Níveis I,II,III): 11 de novembro (segunda-feira)
- Prova da Segunda Fase (Níveis II e III): 12 de novembro (terça-feira)

Divulgação dos estudantes premiados será dia 20/12 na página da OBM: www.obm.org.br

4.3 OMRN

Como de costume, as provas serão realizadas em duas fases. Na primeira fase o estudante faz uma prova objetiva, de múltipla escolha, aplicada na escola do estudante e eliminatória.
As datas das provas da OMRN são:

- $1^{\underline{a}}$ Fase: dia 01/06/2019 - Sábado - Aplicada nas escolas cadastradas.
  Nesta fase, em cada nível, serão aplicadas provas com 20 questões objetivas. Serão classificados para a $2^{\underline{a}}$ fase os alunos com as 20 melhores notas de cada nível.
- $2^{\underline{a}}$ Fase: dia 05/10/2019 - Sábado - Aplicada no campus central da UFRN e em alguns polos no interior do Estado.



5. PROBLEMAS

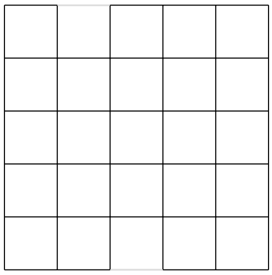
5.1 Problemas para o Nível I

Problema 5.1 Num trem, um pasageiro observou que o vagão em que viajava tinha 80 lugares, todos ocupados e haviam 7 pessoas viajando em pé. Na próxima parada, 9 passageiros deixaram o vagão, 28 pessoas entraram e todos os assentos foram ocupados. Quantas pessoas agora estão viajando em pé?
(a) 0 (b) 7 (c) 16 (d) 26 (e) 35

Problema 5.2 Temos um triângulo equilátero de lado medindo 6 m. O terceiro lado de outro triângulo de mesmo perímetro, cujos dois lados conhecidos medem 3 m, 7 m deve medir:
(a) $7m$ (b) $8m$ (c) $10m$ (d) $12m$ (e) 35

Problema 5.3 O sino de um navio toca a cada meia hora, começando às $00h\ 30min$, com uma batidas (ou seja, o sino toca uma vez). Trinta minutos depois, às $01h\ 00min$, o sino toca duas vezes, às $01h\ 30min$ o sino toca três vezes e, assim por diante, até que o ciclo é completo com oito batidas às $04h\ 00min$. O ciclo então começa novamente com uma batida às $04h\ 30min$, duas batidas às $05h\ 00min$, e assim por diante.
O número total de vezes que o sino bate entre às $00h\ 15min$ de um dia e às $00h15\ min$ do dia seguinte é igual a:
(a) 24 (b) 48 (c) 108 (d) 144 (e) 216

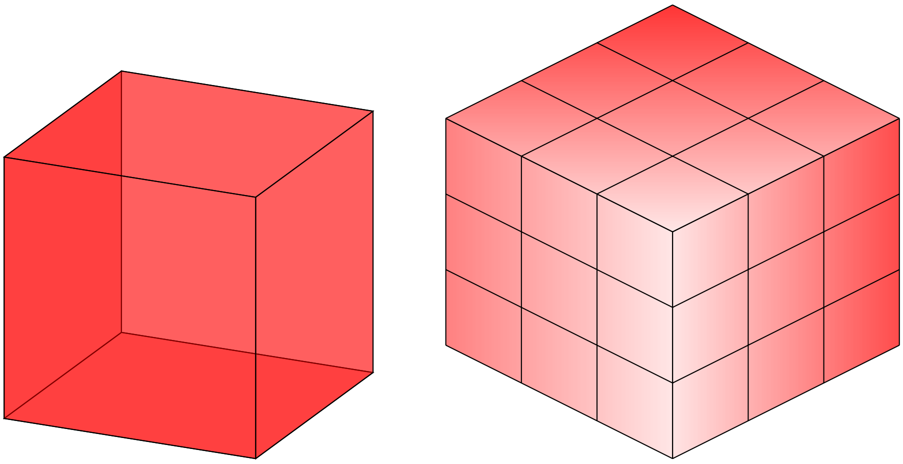
Problema 5.4 De um tabuleiro 5×5, retiram-se duas casas, veja figura a seguir.



A quantidade total de quadrados de vários tamanhos no tabuleiro mutilado é igual a:
(a) 16 (b)23 (c)25 (d)36 (e)39

Problema 5.5 Dois jogadores, A e B, disputam um jogo cujos movimentos consiste em pintar de vermelho casas de um tabuleiro 8×8, que, no início, tem todos elas pintadas de branco. Na sua vez de fazer um movimento, cada jogador deve pintar de vermelho uma casa que está pintada de branco e que não seja adjacente a uma casa que foi pintada de vermelho anteriormente. Os jogadores fazem seus movimentos alternadamente, com A começando. O primeiro jogador que não pode fazer seu movimento perde.
Qual dois jogadores possui uma estratégia vencedora?
Observação: Duas cass são adjacentes se eles compartilham um lado.

Problema 5.6 Um cubo tem as seis faces pintadas de vermelho. Podemos dividi-lo em 27 cubinhos iguais. O comprimento das arestas dos cubinho é, naturalmente, a terceira parte do comprimento da aresta do cubo original.



Quantos cubinhos terão, exatamente, duas faces pintadas de vermelho?

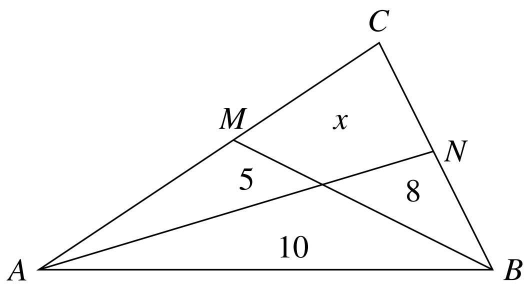
Problema 5.7 Sobre uma lousa imensa, escreve-se com um giz branco uma sequência de 999 números inteiros positivos. Os números não precisam ser em ordem crescente e não precisam ser distintos. Um estudante A circula 500 dos números escritos com giz vermelho. Da esquerda para a direita, os números circulados em vermelho são precisamente os números: $1,\ 2,\ 3;\ldots,\ 499,\ 500.$ Em seguida, o estudante B circula 500 dos números escritos com giz azul. Da esquerda para a direita, os números circulados em azul são precisamente os números: $500,\ 499,\ 498,\ldots,\ 2,\ 1.$
Provar que o número médio da sequência dos 999 números é circulado em vermelho e azul.

5.2 Problemas para o Nível II

Problema 5.8 Em um ônibus existem 50 cadeiras, incluindo a ocupada pelo motorista. Nas outras cadeiras estão viajando alunos das escolas A e B, embora existam algumas cadeiras vazias. A terça parte dos alunos da escola A está dormindo e a quinta parte está lendo. A terça parte dos alunos da escola B está lendo e a oitava parte está dormindo. Podemos concluir que a quantidade de cadeiras vazias é:
(a) 10 (b)11 (c)12 (d)13 (e)17

Problema 5.9 Um preso se encontra no centro de uma área circular de raio medindo 100 metros e pode se mover mediante passos de 1 metro na direção e sentido que ele quiser. No entanto, em cada um de seus passos, o carcereiro malvado pode obrigá-lo a se mover no sentido oposto ao que ele escolheu.
O número mínimo de passos que o preso necessita para alcançar o exterior da área circular e assim ganhar sua liberdade é:
(a) 10 (b) 100 (c) 10000 (d) 11000 (e)110000

Problema 5.10 Divide-se uma região triangular em quatro regiões com áreas iguais a $5,\ 8,\ 10$ e $x,$ veja figura a seguir.



O valor de x é:
(a) 1 (b) 12 (c) 14 (d) 20 (e) 22

Problema 5.11 Temos uma fila de 14 quadrados enumerados da seguinte maneira:

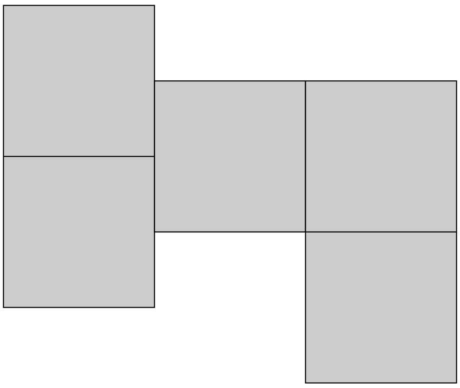
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

No início coloca-se uma pedra sobre um dos quadradinhos. A pedra realiza uma sequência de movimentos da seguinte forma: se a pedra está no quadradinho $n,$ no passo seguinte ela se movimenta para o quadradinho $n-2$ ou para o quadradinho $2n$ (sem sair da fila). É permitido que a pedra visite um quadradinho mais de uma vez.
Se podemos escolher livremente a posição inicial da pedra, a quantidade máxima de quadradinhos diferentes que a pedra pode visitar em uma sequência de movimentos é:
(a) 10 (b) 11 (c)12 (d)13 (e)14

Problema 5.12 Paulo começa em 1 e conta de três em três: $1,\ 4,\ 7\ ,\ 10,\ldots\ldots.$ Ao mesmo tempo e à mesma velocidade, Penny faz a contagem em ordem contrária a partir de $2017,$ contando de cinco em cinco: $2017,\ 2012,\ 2007,\ 2002,\ldots\ldots$

Encontre o único número que Paul e Penny contam ao mesmo tempo.

Problema 5.13 A figura a seguir foi feita colando, sem sobreposição, 5 quadrados congruentes. A figura tem área 45.



Calcule o perímetro da figura.

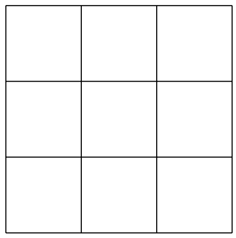
Problema 5.14 Calcule o dígito das unidades do número $M = 17^{2019} + 11^{2019} - 17^{2019}$.

5.3 Problemas para o Nível III

Problema 5.15 Jack e Jill se enfrentaram num jogo para duas pessoas. Em cada partida, o vencedor foi premiado com 2 pontos e o derrotado perdeu 1 ponto. Não houve empates. Jack venceu exatamente 4 partidas e Jill teve um total 10 pontos.
A quantidade de partidas que eles disputaram foram:
(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 5.16 O comprimento máximo do lado de um triângulo equilátero, que pode ser cortado de uma folha de papel retangular com dimensões $21 \times 29,7$ cm é:
(a) $7 \cdot \sqrt{3}$ (b) $14 \cdot \sqrt{3}$ (c) $21 \cdot \sqrt{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) 21

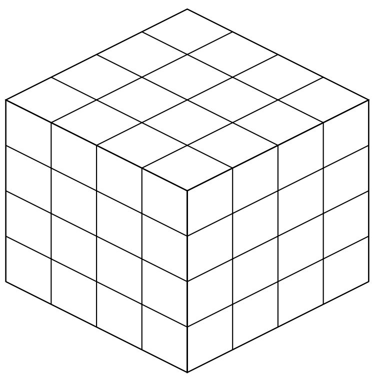
Problema 5.17 Em cada casa de um tabuleiro 3×3 deve estar escrito um número inteiro positivo de tal modo que o produto dos números de qualquer linha e o produto dos números de qualquer coluna seja um múltiplo de 30.



O menor valor que a soma de todos os números escritos no tabuleiro pode assumir é:
(a) 30 (b) 33 (c) 35 (d) 36 (e) 43

Problema 5.18 Temos um chapéu com vários coelhos brancos, cinzentos e pretos. Quando começa o espetáculo, um mágico retira, aleatoriamente, os coelhos do chapéu (sem retorná-los). A probabilidade de que ele retire um coelho branco antes de um cinzento é $\frac{3}{4}$. A probabilidade de que ele retire um coelho cinzento antes de um preto, um é $\frac{3}{4}$ também.
A probabilidade de que o mágico retire um coelho branco antes de um preto é:
(a) 0 $(b)\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{9}{10}$ (e) $\frac{2}{5}$

Problema 5.19 Um cubo é formado por 4^3 cubos unitários, cada um contendo um número inteiro. Em cada movimento, você escolhe um cubo unitário e aumenta de 1 todos os números inteiros nos cubos vizinhos (cubos vizinhos são os que possuem um face em comum com o cubo escolhido).



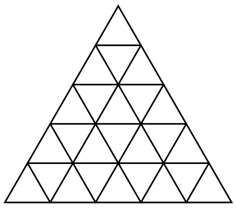
Com esses movimentos, é possível chegar a uma situação em que todos 4^3 números inteiros sejam divisíveis por 3, não importando qual seja a posição inicial?

Problema 5.20 Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y),$$

para todos os números reais x e y.

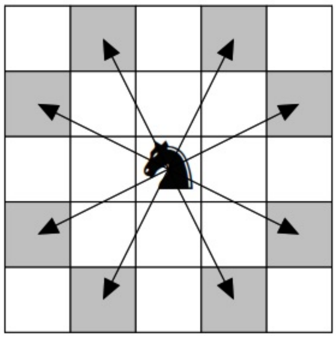
Problema 5.21 Num triângulo ABC, divide-se cada lado em n partes iguais e de cada ponto da divisão traça-se paralelas aos outros dois lados. Veja figura a seguir para o caso em que $n = 5$.



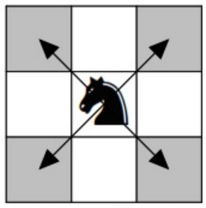
Qual é a quantidade de paralelogramos que podem ser vista dentro do triângulo ABC?

5.4 Problemas do Nível Universitário

Problema 5.22 Um cavalo, peça do jogo de xadrez, machucou a perna e está mancando. Ele alterna entre um movimento normal e um movimento curto, onde ele se move para qualquer célula na diagonal vizinha, veja figura a seguir.



Movimento Normal



Movimento Curto

O cavalo mancando se move em um retângulo 5×6 do tabuleiro de xadrez começando com um movimento normal.
Se o cavalo mancando está começando a partir de uma casa do tabuleiro de sua própria escolha e não lhe é permitido visitar qualquer casa (incluindo a casa inicial) mais do que uma vez, o maior número de movimentos que ele pode fazer é:
(a) 5 (b) 6 (c) 15 (d) 25 (e) 30

Problema 5.23 Seja M um subconjunto de $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 15\}$ tal que o produto de quaisquer três elementos distintos em M não seja um quadrado perfeito.
A quantidade máxima de elementos de M é: (a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 5.24 Sejam x e y números reais tais que:

$$(x-1)^3 + 2017(x-1) = -1 \qquad e \qquad (y-1)^3 + 2017(y-1) = 1$$

O valor de $x+y$ é:
(a) 2 (b)3 (c)2015 (d)2017 (e)2019

Problema 5.25 Uma sequência $f_0,\ f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n, \ldots\ldots$ é definida por:

$$f_0(x) = x \ \ e$$

$$f_{n-1}(x) = \begin{cases} xf'(x), & se\ n\ \text{é}\ par \\ \int_0^x f_n(t)dt, & se\ n\ \text{é ímpar} \end{cases}$$

O valor de $f_{2018}(1)$ é:
(a) $\frac{1}{1007}$ (b) $\frac{1}{1009}$ (c) $\frac{1}{1010}$ (d) $\frac{2}{1007}$ (e) $\frac{2}{1009}$

Problema 5.26 Dado um inteiro $n > 1$, seja S_n o grupo das permutações dos números $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n$. Dois jogadores, A e B, disputam o seguinte jogo, em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada consiste em escolher um (único) elemento

do grupo S_n. Não pode ser escolhido um elemento que já tenha sido escolhido. O jogo termina no momento em que os elementos escolhidos geram todo o grupo S_n. O jogador que faz o último movimento perde o jogo.
Quem vence: A ou B? Qual a estratégia vencedora?

Problema 5.27 (a) Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso nos reais, isto é, todo intervalo não vazio da reta possui uma infinidade de números racionais.
(b) Mostre que o conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso nos reais, isto é, todo intervalo não vazio da reta possui uma infinidade de números irracionais.

Problema 5.28 A medida de um ângulo dado é $\frac{180^\circ}{n}$, onde n é um número inteiro positivo não divisível por 3.
Prove que o ângulo dado pode ser trisseccionado usando uma régua (sem marcação) e um compasso.

6. RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

6.1 Problemas para o Nível I

Problema 6.1 Num trem, um pasageiro observou que o vagão em que viajava tinha 80 lugares, todos ocupados e haviam 7 pessoas viajando em pé. Na próxima parada, 9 passageiros deixaram o vagão, 28 pessoas entraram e todos os assentos foram ocupados. Quantas pessoas agora estão viajando em pé?
(a) 0 (b) 7 (c) 16 (d) 26 (e) 35

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Antes da próxima parada, 7 pessoas viajavam em pé. Portanto, o número de pessoas que viajavem em pé quando o trem partiu da parada era: $7-9+28=26$.

Problema 6.2 Temos um triângulo equilátero de lado medindo 6 m. O terceiro lado de outro triângulo de mesmo perímetro, cujos dois lados conhecidos medem 3 m, 7 m deve medir:
(a) $7m$ (b) $8m$ (c) $10m$ (d) $12m$ (e) 35

Solução

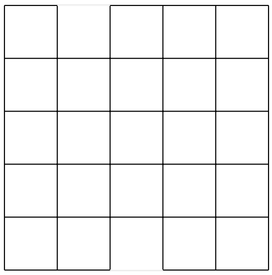
A resposta correta é a alternativa (b).
Em metros, o perímetro do triângulo equilátero dado é: $3 \cdot 6 = 18$. Como o perímetro do outro triângulo é também 18 m, segue que o terceiro lado de outro triângulo de mesmo perímetro deve medir em metros: $18-(3+7)=8$.

Problema 6.3 O sino de um navio toca a cada meia hora, começando às $00h\ 30min$, com uma batidas (ou seja, o sino toca uma vez). Trinta minutos depois, às $01h\ 00min$, o sino toca duas vezes, às $01h\ 30min$ o sino toca três vezes e, assim por diante, até que o ciclo é completo com oito batidas às $04h\ 00min$. O ciclo então começa novamente com uma batida às $04h\ 30min$, duas batidas às $05h\ 00min$, e assim por diante.
O número total de vezes que o sino bate entre às $00h\ 15min$ de um dia e às $00h15\ min$ do dia seguinte é igual a:
(a) 24 (b) 48 (c) 108 (d) 144 (e) 216

Solução

A resposta correta é a alternativa (e).
Em um único ciclo de 4 horas o sino é tocado $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ vezes. Ao longo de um dia, que tem 24 horas, existem 6 desses ciclos. Então entre às $00h\ 15min$, e às $00h\ 15min$ do dia seguinte, ou seja, 24 horas depois, o sino é tocado: $6 \cdot 36 = 216$ vezes.

Problema 6.4 De um tabuleiro 5×5, retiram-se duas casas, veja figura a seguir.



A quantidade total de quadrados de vários tamanhos no tabuleiro mutilado é igual a:
(a) 16 (b)23 (c)25 (d)36 (e)39

Solução

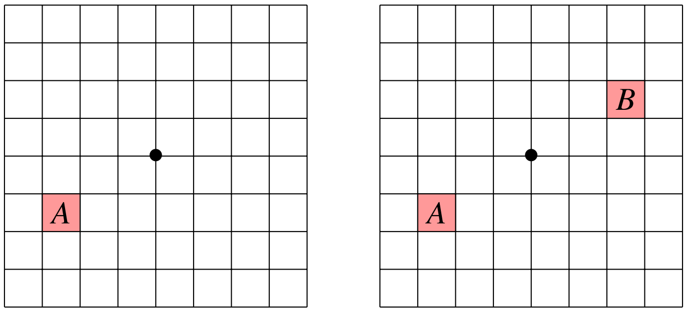
A resposta correta é a alternativa (e).
Existem:
23 quadrados de dimensões 1×1;
12 quadrados de dimensões 2×2 e
4 quadrados de dimensões 3×3;
Portanto, o total de quadrados é: $23 + 12 + 4 = 39$.

Problema 6.5 Dois jogadores, A e B, disputam um jogo cujos movimentos consiste em pintar de vermelho casas de um tabuleiro 8×8, que, no início, tem todos elas pintadas de branco. Na sua vez de fazer um movimento, cada jogador deve pintar de vermelho uma casa que está pintada de branco e que não seja adjacente a uma casa que foi pintada de vermelho anteriormente. Os jogadores fazem seus movimentos alternadamente, com A começando. O primeiro jogador que não pode fazer seu movimento perde.
Qual dois jogadores possui uma estratégia vencedora?

Observação: Duas cass são adjacentes se eles compartilham um lado.

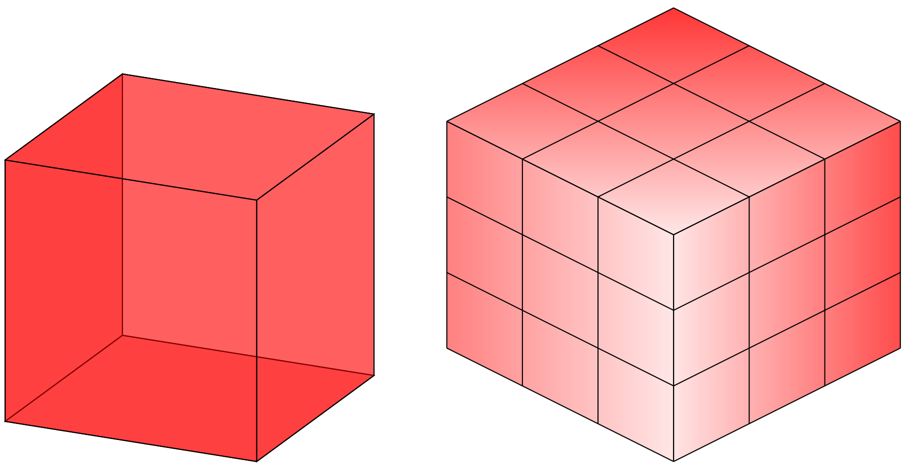
Solução

O jogador B posui uma estratégia vencedora.
A estratégia do jogador B será baseada no fato de que o tabuleiro 8×8 possui um centro. A estratégia é a seguinte: cada vez que o jogador A pintar uma casa, então B pintará a casa que é simétrica com respeito ao centro do tabuleiro. Por exemplo, se o jogador A, no seu primero movimento, pintar a seguinte casa mostrada no tabuleiro à esquerda na figura a seguir, então B pintará a casa mostrada na figura no tabuleiro à direita.



É fácil ver que cada casa do tabuleiro possui sua casa simétrica em relação ao centro do tabuleiro e que as duas não são adjacentes. Assim, podemos agrupar todas as casas do tabuleiro em pares, de modo que as casas em cada par sejam simétricas em relação ao centro do tabuleiro. Toda vez que o jogador A pintar uma casa, B pintará a outra casa do par. Desse modo, o jogador A sempre pode pintar uma casa que não é adjacente a uma que foi pintada anteriormente. Portanto, como o jogo tem ordem, em algum momento do jogo A não poderá pintar uma casa, tornando o jogador B vencedor.

Problema 6.6 Um cubo tem as seis faces pintadas de vermelho. Podemos dividi-lo em 27 cubinhos iguais. O comprimento das arestas dos cubinho é, naturalmente, a terceira parte do comprimento da aresta do cubo original.



Quantos cubinhos terão, exatamente, duas faces pintadas de vermelho?

Solução

A resposta é 12.
É fácil ver que teremos 8 cubinhos que ocupam os vértices do cubo grande e estes terão exatamente 3 faces pintadasde vermelho. Os cubinhos que ocupam a parte central das arestas do cubo grande serão precisamente 12 cubinhos, que é a quantidade de arestas do cubo. Estes cubinhos são aqueles que tem exatamente duas faces pintadas de vermelho. É interessante observar que:
(i) existem extamente 6 cubinhos que possuem uma única face pintada de vermelho: são aqueles localizados no centro de cada uma das seis faces do cubo grande;
(ii) o cubinho localizado no centor do cubo grande não possui qualquer face pintada de vermelho.

Problema 6.7 Sobre uma lousa imensa, escreve-se com um giz branco uma sequência de 999 números inteiros positivos. Os números não precisam ser em ordem crescente e não precisam ser distintos. Um estudante A circula 500 dos números escritos com giz vermelho. Da esquerda para a direita, os números circulados em vermelho são precisamente os números: $1,\ 2,\ 3;\dots,\ 499,\ 500.$ Em seguida, o estudante B circula 500 dos números escritos com giz azul. Da esquerda para a direita, os números circulados em azul são precisamente os números: $500,\ 499,\ 498,\dots,\ 2,\ 1.$
Provar que o número médio da sequência dos 999 números é circulado em vermelho e azul.
Solução

Para facilitar, chamaremos um número círculado em vermelho de *um número vermelho*, e da mesma forma para o azul. Então alguns números podem ser tanto vermelho como azul. Como existem 999 números inteiros positivos escritos na lousa, dos quais 500 são vermelhas e 500 são azuis, temos pelo menos um número é bicolor (pelo Princípio da Casa dos Pombos). Considere um número k que seja bicolor. Da esquerda para a direita, os números vermelhos formam a sequência $1,\ 2,\ 3;\dots,\ 499,\ 500.$ Portanto, à esquerda do número bicolor k temos os números vermelhos de 1 até $k-1,$ e à direita, temos os números vermelhos de $k+1$ até $500.$ Os números azuis são escritos em ordem contrária: da esquerda para direita, formando a sequência: $500,\ 499,\ 498,\dots,\ 2,\ 1.$ À esquerda do número bicolor $k,$ temos os números azuis de $k+1$ a 500 e à direita temos números azuis de 1 a $k-1.$
Agora, contamos quantos números existem em cada lado do número bicolor.
À esquerda, temos os números vermelhos de 1 a $k-1$ e os azuis de $k+1$ a $500.$ Portanto, existem pelo menos 499 números inteiros distintos à esquerda. À direita temos o números vermelhos de $k+1$ a 500 e os números azuis de 1 a $k-1.$ Novamente, temos pelo menos 499 números distintos. Como existem apenas $999 = 499+499+1$ números na lousa, já consideramos todos os números na lousa. Podemos concluir que há precisamente 499 números em cada lado do número bicolor $k.$ O número de bicolor, portanto, está localizado precisamente no meio da sequência escrita na lousa.

6.2 Problemas para o Nível II

Problema 6.8 Em um ônibus existem 50 cadeiras, incluindo a ocupada pelo motorista. Nas outras cadeiras estão viajando alunos das escolas A e B, embora existam algumas cadeiras vazias. A terça parte dos alunos da escola A está dormindo e a quinta parte está lendo. A terça parte dos alunos da escola B está lendo e a oitava parte está dormindo. Podemos concluir que a quantidade de cadeiras vazias é:
(a) 10 (b)11 (c)12 (d)13 (e)17

Solução

A resposta correta é a alternativa (a).
Seja a a quantidade de alunos da escola A e b a quantidade de alunos da escola B. Como o ônibus possui 50 cadeiras e uma está ocupada pelo motorista, temos que $a+b \leq 49$.
Agora, observe que, pelas hipóteses do problema, o número a é divisível por 3 e 5, enquanto o número b é divisível por 3 e 8, o que implica que a é múltiplo de 15 e b é múltiplo de 24. Como ambos os números são menores do que 49, temos: b só pode ser 24 ou 48. Mas, se $b=48$, temos que:

$$a+b=a+48 \leq 49 \Rightarrow a \leq 1,$$

que não é possível pois a é múltiplo de 15. Logo, $b=24$. Por outro lado, como $a+b=a+24 \leq 49$, temos que $a \leq 25$ e como é múltiplo de 15, segue que $a=15$. Mas, a quantidade total de cadeiras ocupadas no ônibus é igual a:

$$a+b+1=15+24+1=40.$$

Portanto, a quantidade de cadeiras vazias é: $50-40=10$

Problema 6.9 Um preso se encontra no centro de uma área circular de raio medindo 100 metros e pode se mover mediante passos de 1 metro na direção e sentido que ele quiser. No entanto, em cada um de seus passos, o carcereiro malvado pode obrigá-lo a se mover no sentido oposto ao que ele escolheu.
O número mínimo de passos que o preso necessita para alcançar o exterior da área circular e assim ganhar sua liberdade é:
(a) 10 (b) 100 (c) 10000 (d) 11000 (e)110000

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Seja O o centro de a área circular e P o ponto em que se encontra o preso em um dado momento depois de seu primeiro passo (para o primeiro passo é irrelevante a direção que ele escolhe). Para garantir a mínima pena por parte do carcereiro deberá escolher a direção perpendicular a OP, pois, independentemente do sentido, o teorema de Pitágoras nos diz que a nova distância ao centro despois de dar o passo será:

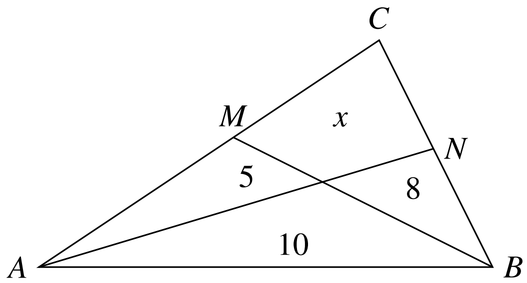
$$\sqrt{\overline{OP}^2+1} \geq \overline{OP}.$$

O preso escolhendo qualquer outra direção, o carcereiro pode fazer com que preso passe a ficar a uma distância menor do que essa. Em seguida, o preso maximiza a distância ao centro em cada passo. Portanto, seguindo esta estratégia ideal o preso:

- Depois do primeiro passo, estará a distância 1 do centro;
- Depois do segundo passo, estará a distância $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ do centro;
- Depois do segundo passo, estará a distância $\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$ do centro;
- ....
- ....
- Depois do passo n, estará a distância $\sqrt{n}$ do centro;

Portanto, o preso conseguirá escapar depois do passo n tal que $\sqrt{n}=100$, ou seja, depois de $n=100^2=10000$ passos.

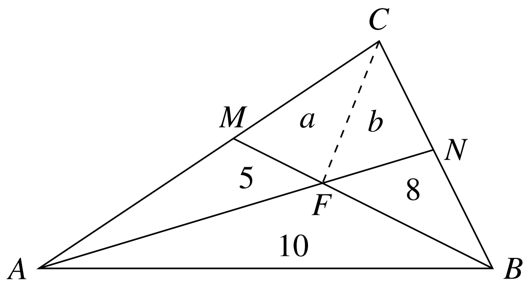
Problema 6.10 Divide-se uma região triangular em quatro regiões com áreas iguais a $5,\ 8,\ 10$ e x, veja figura a seguir.



O valor de x é:
(a) 1 (b) 12 (c) 14 (d) 20 (e) 22

Solução

A resposta correta é a alternativa (e).
Chamemos de F o ponto de interseção dos segmentos AN e BM e liguemos o ponto F ao ponto C. Com isso, dividimos a área x em duas partes a e b, veja figura a seguir.



Chamemos de $S[\Delta CMB]$ a área do triângulo CMB. Assim, com essa notação, podemos concluir que:

$$\frac{S[\Delta CMB]}{S[\Delta CMF]}=\frac{S[\Delta MAB]}{S[\Delta MAF]}\quad e\quad \frac{S[\Delta CNA]}{S[\Delta CNF]}=\frac{S[\Delta NBA]}{S[\Delta NBF]}$$

Pela figura podemos observar que as duas igualdades acima podem ser escritas como:

$$\frac{a+b+8}{a}=\frac{5+10}{5}\quad e\quad \frac{a+b+5}{b}=\frac{8+10}{8},$$

Assim, temos

$15a = 5a + 5b + 40 \Rightarrow 2a - b - 8 = 0\ (*)\ \ e\ \ 18b = 8a + 8b + 40 \Rightarrow 4a - 5b + 20 = 0\ (**)$.

De $(*)$ e $(**)$ obtemos $a = 10$ e $b = 12$. Como $x = a + b = 10 + 12 = 22$, que é a resposta.

Problema 6.11 Temos uma fila de 14 quadrados enumerados da seguinte maneira:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

No início coloca-se uma pedra sobre um dos quadradinhos. A pedra realiza uma sequência de movimentos da seguinte forma: se a pedra está no quadradinho n, no passo seguinte ela se movimenta para o quadradinho $n-2$ ou para o quadradinho $2n$ (sem sair da fila). É permitido que a pedra visite um quadradinho mais de uma vez.
Se podemos escolher livremente a posição inicial da pedra, a quantidade máxima de quadradinhos diferentes que a pedra pode visitar em uma sequência de movimentos é:
(a) 10 (b) 11 (c)12 (d)13 (e)14

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Suponha que a pedra pode visitar todos os quadradinhos. Em particular, em algum momento a pedra deveria estar no quadradinho 13. Mas, observe que, com as hipóteses, é impossível ela atingir o quadradinho 13. Logo, se a pedra vai visitar todos os quardinhos, ela deve começar no quadradinho 13. Assim, em algum movimento a pedra vai visitar o quadradinho 14. Mas, a pedra só vai atingir o quadradinho 14 se antes estava no quadradinho 7, só pode chegar ao 7 se antes estava no 9, só pode chegar ao 9 se antes estava no 11 e só pode chegar ao 11 se antes estava no 13. Logo, os primeiros movimentos seriam:

$$13 \to 11 \to 9 \to 7 \to 14 \to \ldots\ldots$$

De modo análogo, depois de alguns movimentos a pedra deve chegar ao quadradinho 5 e só pode chegar ao quadradinho 5 se antes estava no 7, antes no 11 e antes no 13. Logo, os primeiros movimentos seriam:

$$13 \to 11 \to 9 \to 7 \to 5 \to \ldots\ldots$$

que contradiz com o parágrafo anterior.
Portanto, a pedra não pode visitar todos os 14 quadradinhos. Por outro lado, a pedra pode visitar 13 quadradinhos, fazendo o seguinte percurso:

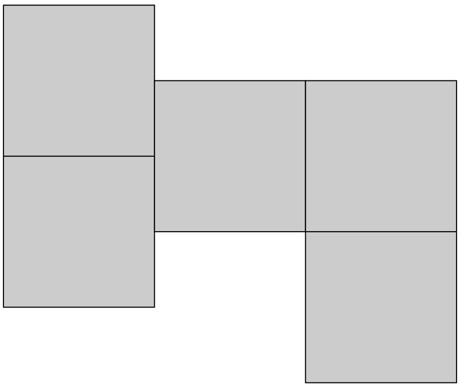
$$13 \to 11 \to 9 \to 7 \to 5 \to 3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 6 \to 12 \to 10$$

Problema 6.12 Paulo começa em 1 e conta de três em três: 1, 4, 7 , 10,....... Ao mesmo tempo e à mesma velocidade, Penny faz a contagem em ordem contrária a partir de 2017, contando de cinco em cinco: 2017, 2012, 2007, 2002,......
Encontre o único número que Paul e Penny contam ao mesmo tempo.

Solução

A resposta é 757
Observe que o $k-$ésimo número que Paul conta é $3k-2$ e o $k-$ésimo número que Penny conta é de $2022-5k$. Estes são iguais quando $3k-2=2022-5K$, o que implica $k=253$. Portanto, o número que Paul e Penny contam ao mesmo tempo é: $3\cdot253-2=757$.

Problema 6.13 A figura a seguir foi feita colando, sem sobreposição, 5 quadrados congruentes. A figura tem área 45.



Calcule o perímetro da figura.

Solução

A resposta é 36.
Como a área total da figura é a soma de 5 áreas dos cinco quadrados congruentes, temos que a área de cada quadrado é igual a $\frac{45}{5}=9$. Como a área de uma quadrado é igual ao comprimento do lado ao quadrado, temos que, se a é comprimento do lado de cada quadrado, então: $a^2=9\Rightarrow\ a=3$. Agora, o perímtero da figura é igual ao comprimento de 11 lados de um dos quadrados congruentes acrescido de mais de duas pequenas partes que somada são iguais ao comprimento de um lado do quadrado. Portanto, o perímetro é igual a: $12\cdot3=36$.

Problema 6.14 Calcule o dígito das unidades do número $M=17^{2019}+11^{2019}-17^{2019}$.

Solução

A resposta é 1
Observe que, para calcular o dígito das unidades de M, basta fazer as operações indicada com o dígito das unidade de cada parcela. Mas, o dígito das unidades de 17^{2019} e 17^{2019} é o mesmo. O dígito da unidade de 11^{2019} é 1. Logo, a resposta é 1.

6.3 Problemas para o Nível III

Problema 6.15 Jack e Jill se enfrentaram num jogo para duas pessoas. Em cada partida, o vencedor foi premiado com 2 pontos e o derrotado perdeu 1 ponto. Não houve empates. Jack venceu exatamente 4 partidas e Jill teve um total 10 pontos.
A quantidade de partidas que eles disputaram foram:
(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Como Jack venceu exatamente 4 jogos, então Jill perdeu 4 jogos e perdeu 4 pontos por essas derrotas. Jill ganhou 10 pontos no total e então ganhou $10-4=6$ pontos por suas vitórias. Como por cada vitória o vencedor ganha 2, Jill venceu 3 jogos. Então Jack ganhou 4 jogos, Jill ganhou 3 jogos e, como não houve empates, eles disputaram: $4+3=7$ jogos.

Problema 6.16 O comprimento máximo do lado de um triângulo equilátero, que pode ser cortado de uma folha de papel retangular com dimensões $21 \times 29,7$ cm é:
(a) $7 \cdot \sqrt{3}$ (b) $14 \cdot \sqrt{3}$ (c) $21 \cdot \sqrt{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) 21

Solução

A resposta correta é a alternativa (b).
Qualquer triângulo equilátero situada entre um par de linhas paralelas pode ser ampliado, devidamente para que dois de seus vértices estejam sobre lados opostos, bordo da folha retangular. De todos esses triângulos equiláteros, o de maior comprimento de lado é obtido a partir de um com um lado inteiro sobre a borda da folha. Assim, se a largura da folha retangular é 21 cm, a maior altura possível de um triângulo equilátero é 21 cm. O comprimento do lado é então $\frac{21}{sen\ 60^\circ} = 14 \cdot \sqrt{3}$. Como $14\sqrt{3} < 14 \cdot 2 < 29,7$, segue que o triâgulo pode se inserir na folha retangular.

Problema 6.17 Em cada casa de um tabuleiro 3×3 deve estar escrito um número inteiro positivo de tal modo que o produto dos números de qualquer linha e o produto dos números de qualquer coluna seja um múltiplo de 30.

O menor valor que a soma de todos os números escritos no tabuleiro pode assumir é:
(a) 30 (b) 33 (c) 35 (d) 36 (e) 43

Solução

A resposta correta é a alternativa (a).
Inicialmente, observe que: se o produto de três números inteiros positivos é múltiplo de 30, então a soma deles é maior do que ou igual a 10.
De fato, sejam a, b, c números inteiros positivos cujo produto seja um múltiplo de 30. Isto é, $abc \geq 30$. Pela desigualdade das médias, temos que:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

e como $abc \geq 30$, segue que $abc > 27$, e logo, $\sqrt[3]{abc} > \sqrt[3]{27} = 3$. Pela desigualdade das médias, temos:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} > 3 \Rightarrow a+b+c > 9 \Rightarrow a+b+c \geq 10.$$

Além disso, é possível encontrar três números inteiros positivos a, ,b ,c para os quais $a+b+c = 10$, com abc múltiplo de 30: basta tomar $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.
Pelo exposto acima, concluímos que a soma dos 9 números escritos no tabuleiro é maior do que ou igual a $10+10+10 = 30$. Abaixo, segue uma forma de escrever os números nas casas do tabuleiro 3×3 como pretendido:

5	2	3
3	5	2
2	3	5

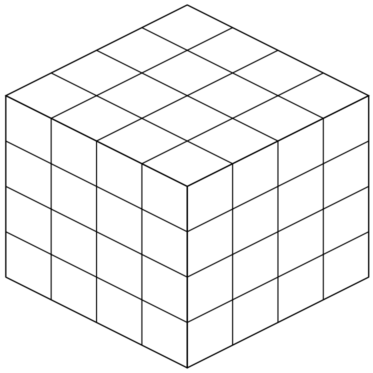
Portanto, o menor valor de pode assumir a soma dos 9 números inteiros positivos do tabuleiro é 30.

Problema 6.18 Temos um chapéu com vários coelhos brancos, cinzentos e pretos. Quando começa o espetáculo, um mágico retira, aleatoriamente, os coelhos do chapéu (sem retorná-los). A probabilidade de que ele retire um coelho branco antes de um cinzento é $\frac{3}{4}$. A probabilidade de que ele retire um coelho cinzento antes de um preto, um é $\frac{3}{4}$ também. A probabilidade de que o mágico retire um coelho branco antes de um preto é:
(a) 0 $(b)\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{9}{10}$ (e) $\frac{2}{5}$

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
O mágico retira um coelho branco antes de um cinzento com a probabilidade de $\frac{3}{4}$. Portanto, o chapéu contém três vezes mais coelhos brancos do que coelhos cinzentos. Da mesma forma, existem três vezes mais coelhos cinzento do que coelhos pretos. Portanto, no chapéu existem nove vezes mais coelhos brancos do que coelhos pretos e a probabilidade procurada é $\frac{9}{10}$.

Problema 6.19 Um cubo é formado por 4^3 cubos unitários, cada um contendo um número inteiro. Em cada movimento, você escolhe um cubo unitário e aumenta de 1 todos os números inteiros nos cubos vizinhos (cubos vizinhos são os que possuem um face em comum com o cubo escolhido).



Com esses movimentos, é possível chegar a uma situação em que todos 4^3 números inteiros sejam divisíveis por 3, não importando qual seja a posição inicial?

Solução

Pinte os cubos alternadamente de preto e branco, de modo que dois vizinhos sempre tenham cores diferentes. Observe que os números inteiros em cubos brancos só mudam quando se faz um movimento num cubo preto. Agora, mude a pintura dos cubos brancos que têm exatamente 4 vizinhos, tornando-os verdes. Se olharmos para um cubo preto aleatório, ele tem 0, 3 ou 6 vizinhos brancos. Assim, se olharmos para a soma dos números inteiros em cubos brancos, ela muda por 0, 3 ou 6 em cada movimento. Com esse raciocínio, segue que se esta soma não é divisível por 3 no início, nunca será ao longo dos movimentos efetuados. Portanto, nenhum dos número inteiros em cubos brancos será divisível por 3, em qualquer momento do jogo.

Problema 6.20 Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y),$$

para todos os números reais x e y.

Solução

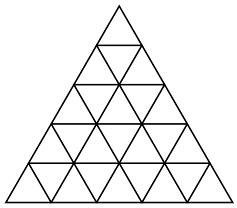
A resposta é $f(y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$.
Substituindo $x = 0$ na expressão dada, obtemos:

$$f(0^2y) = f(0y) + yf(f(0) + y) \Rightarrow f(0) = f(0) + yf(f(0) + y) \Rightarrow yf(f(0) + y) = 0 \ (*),$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.
Na expressão acima, fazendo $y = -f(0)$, obtemos $-f(0)f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \ (**)$.
Como $f(0) = 0$, segue de (*) que $yf(y) = 0$. Mas, para $y \neq 0$, temos que $f(y) = 0$.

Este fato e o resultado e $(**)$, implicam que $f(y)=0$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Problema 6.21 Num triângulo ABC, divide-se cada lado em n partes iguais e de cada ponto da divisão traça-se paralelas aos outros dois lados. Veja figura a seguir para o caso em que $n=5$.



Qual é a quantidade de paralelogramos que podem ser vista dentro do triângulo ABC?
Solução

A resposta é $\dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{8}$.
Observe que cada paralelogramo é determinado por dois pares de retas, onde cada membro do par de retas é paralelo a um lado diferente do triângulo. Com isso, vemos que o números total de paralelogramos é igual a 3 vezes o número determinado pelas quantidade de retas paralelas a dois lados do triângulo.
Vamos supor, sem perda de generalidade, que o triângulo ABC é retângulo. Assim, nesse caso, os paralelogramos serão retângulos.
Seja T_n a quantidade de retângulos formados por segmentos paralelos aos lados quando os lados forem divididos igualmente em n partes. É fácil ver que $T_1=0$ e $T_2=1$.
Suponha que os lados do triânguo foram divididos igualmente em n partes e os segmentos de retas paralelas aos lados do $\Delta\, ABC$ foram traçados. Agora, apagando a linha mais abaixo dos retângulos ficamos no caso em que os lados do triângulo forma divididos igualmente em $n-1$ partes . Agora, observe que a diferença entre T_n e T_{n-1} é a quantidade de retângulos perdidos quando alinha mais abaixo foi apagada. Mas, o número de retângulos perdidos nesse pricesso é igual a:

$$1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 1=\binom{n+1}{3}$$

Logo, temos:

$$T_n=\binom{n+1}{3}+Tn-1,$$

que nos leva a seguinte igualdade:

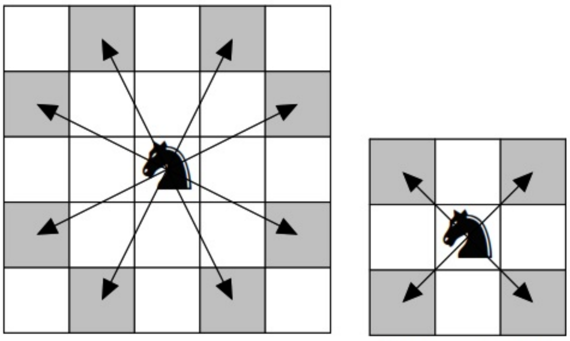
$$T_n=\binom{n+1}{3}+\binom{n}{3}+\binom{n-1}{3}+\ldots+\binom{3}{3}+T_1=\binom{n+2}{4}.$$

Portanto, a quantidade total de paralelogramas no triângulo é igual a:

$$3\cdot\binom{n+2}{4}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{8}.$$

6.4 Problemas do Nível Universitário

Problema 6.22 Um cavalo, peça do jogo de xadrez, machucou a perna e está mancando. Ele alterna entre um movimento normal e um movimento curto, onde ele se move para qualquer célula na diagonal vizinha, veja figura a seguir.



Movimento Normal   Movimento Curto

O cavalo mancando se move em um retângulo 5×6 do tabuleiro de xadrez começando com um movimento normal.
Se o cavalo mancando está começando a partir de uma casa do tabuleiro de sua própria escolha e não lhe é permitido visitar qualquer casa (incluindo a casa inicial) mais do que uma vez, o maior número de movimentos que ele pode fazer é:
(a) 5 (b) 6 (c) 15 (d) 25 (e) 30

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Vamos enumerar as filas do tabuleiro de xadrez com números de 1 a 5. Consideraremos somente os movimentos curtos. Cada movimento curto conecta duas casas de linhas de paridade diferente e não há dois movimentos curtos que tenham uma csas do tabuleiro em comum. Portanto, pode haver no máximo 12 movimentos curtos, pois existem apenas 12 casas nas filas de paridade par (segunda e quarta). Isso significa que o número máximo de movimentos é: 12 curtas, mais 13 normais, num total de 25 movimentos. A figura a seguir mostra que 25 movimentos que de fato podem ser feitos.

19	5	7	9	11	
4	18	20	6	8	10
			21	26	12
17	3	24	15	13	22
2	16	14	25	23	

Problema 6.23 Seja M um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ tal que o produto de quaisquer três elementos distintos em M não seja um quadrado perfeito.

A quantidade máxima de elementos de M é: (a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Observe que o produto dos três elementos em cada um dos subconjuntos a seguir é um quadrado perfeito:

$$\{1,4,\ 9\},\ \{2,\ 6,\ 12\},\ \{3,\ 5,\ 15\},\ \{7,\ 8,\ 14\}.$$

Logo, nenhum desses conjuntos é um subconjunto de M.
Como eles são disjuntos, segue que M possui no máximo $15-4=11$ elementos. Como 10 não é um elemento dos conjutos acima mencionados, se 10 não está em M, então M possui no máximo 10 elementos. Se 10 está em M, então nenhum dos subconjuntos seguinte é um subconjunto de M:

$$\{2,\ 5\},\ \{6,\ 5\},\ \{1,\ 4,9\},\ \{7,\ 8,\ 9\}.$$

Se $\{3,\ 2\}$ não é um subconjunto de M, segue que M possui no máximo 10 elementos. Se $\{3,\ 2\}$ é um subconjunto de M, segue que nenhum dos sobconjuntos seguintes é um subconjunto de M:

$$\{1\},\ \{4\},\ \{9\},\ \{2,\ 6\},\ \{5,\ 15\},\ \{7,\ 8,\ 14\}.$$

Logo, M possui no máximo 9 elementos.
Portanto, M possui no máximo 10 elementos e, como exemplo, o conjunto

$$M=\{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\}$$

possui as propriedades desejadas.

Problema 6.24 Sejam x e y números reais tais que:

$$(x-1)^3+2017(x-1)=-1 \qquad e \qquad (y-1)^3+2017(y-1)=1$$

O valor de $x+y$ é:
(a) 2 (b)3 (c)2015 (d)2017 (e)2019

Solução

A resposta correta é a alternativa (a).
Considere a função $f(t)=t^3+2017t$ e observe que ela é uma função crescente, portanto, injetiva. Veja que, como $f(y-1)=(y-1)^3+2017(y-1)=1$, segue que $f(1-y)=(1-y)^3+2017(1-y)=-1$ Como, por hipótese, temos $f(x-1)=f(1-y)$ segue que

$$x-1=1-y \Rightarrow x+y=2.$$

Problema 6.25 Uma sequência $f_0,\ f_1,\ f_2,\dots,\ f_n,\dots\dots$ é definida por:

$$f_0(x) = x \ \ e$$

$$f_{n-1}(x) = \begin{cases} xf'(x), & se\ n\ \text{é}\ par \\ \int_0^x f_n(t)dt, & se\ n\ \text{é ímpar} \end{cases}$$

O valor de $f_{2018}(1)$ é:
$(a)\ \frac{1}{1007}$ $(b)\frac{1}{1009}$ $(c)\ \frac{1}{1010}$ $(d)\frac{2}{1007}$ $(e)\ \frac{2}{1009}$

Solução

A resposta correta é a alternativa (c).
Vamos provar, por indução, que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{k+1}}{k+1}, & se\ n\ \text{é}\ par \\ x^{k+1}, & se\ n\ \text{é ímpar} \end{cases}$$

De fato, por hipótese o resultado é verdadeiro para $n = 0$.
Para $n = 2k,$ com $k \in \mathbb{N}$, a hipótese de indução nos dá:

$$f_{n+1}(x) = x \cdot \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big) = x^{k+1}.$$

Por outro lado, para $n = 2k+1,$ com $k \in \mathbb{N},$ temos

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x t^{k+1}dt = \frac{x^{k+2}}{k+1}.$$

Assim, como $2018 = 2 \cdot 1009$, temos que

$$f_{2018}(x) = \frac{x^{1009+1}}{1009+1} = \frac{x^{1010}}{1010}.$$

Portanto, $f_{2018}(1) = \frac{1}{1010}.$

Problema 6.26 Dado um inteiro $n > 1,$ seja S_n o grupo das permutações dos números $1,\ 2,\ 3,\dots,\ n.$ Dois jogadores, A e $B,$ disputam o seguinte jogo, em que jogam alternadamente. O jogador A começa. Uma jogada consiste em escolher um (único) elemento do grupo $S_n.$ Não pode ser escolhido um elemento que já tenha sido escolhido. O jogo termina no momento em que os elementos escolhidos geram todo o grupo $S_n.$ O jogador que faz o último movimento perde o jogo.
Quem vence: A ou B? Qual a estratégia vencedora?

Solução

(i) O jogador A vence o jogo quando $n=2$ e quando $n=3$.
Se $n=2$, temos que $S_2=\{\rho_0,\rho_1\}$, onde

$$\rho_0=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \rho_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, basta o jogador A escolher a identidade $I=\rho_0$.
Se $n=3$, temos que $S_2=\{\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3\}$, onde

$$\rho_0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mu_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, basta o jogador escolher um 3-ciclo: ρ_1 ou seu inverso ρ_2.
(ii) Se $n\geq 4$, o jogador B possui uma estratégia vencedora.
Se $n\geq 4$, cada subgrupo de S_n com ordem ímpar é subgrupo de A_n, o subgrupo das permutações pares. Daí, os subgrupos maximais têm a mesma ordem e o jogador B nunca perde.
Considere o momento quando todos os movimentos permitidos levam a derrota na jogada seguinte e seja H o subgrupo gerado pelos elementos selecionados pelos jogadores. Escolhendo um outro elemento do H ele não perderia imediatamente, então todos os elementos de H devem já ter sido escolhidos. Como H e qualquer outro elemento geram S_n, H deve ser um subgrupo maximal em S_n.
Se a ordem de H denotada por $|H|$, é par, então o próximo jogador é A, então B vence. Chamando de n_i a ordem do subgrupo gerado pelo primeiro i elementos escolhidos, temos a seguinte relação de divisibilidade:

$$n_1|n_2|n_3|\dots$$

Vamos mostrar que o jogador B pode obter n_2 par e $n_2<n!$, o que segue que $|H|$ é par e o jogador A fará o último movimento, perdendo o jogo.
Chamemos de g o elemento escolhido pelo jogador A na sua primeira jogada. Se a ordem n_1 de g é par, então o jogador B pode escolher a permutação identidade id e ele terá $n_2=n_1<n!$.
Se n_1 é ímpar, então g é um produto de ciclos ímpares disjuntos, o que ímplica que é uma permutação par. Então o jogador B pode escolher a permutação $h=(1,2)(3,4)$, que é outra permutação par. Uma vez que g e h são elementos do grupo alternado A_n, eles não conseguem gerar todo o grupo S_n.
Como a ordem de h é 2, o jogador B garante que $2|n$ e ele vence.

Problema 6.27 (a) Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso nos reais, isto é, todo intervalo não vazio da reta possui uma infinidade de números racionais.
(b) Mostre que o conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso nos reais, isto é, todo intervalo não vazio da reta possui uma infinidade de números irracionais.

Solução

(i) Inicialmente, observe que todo intervalo aberto não vazio de $\mathbb{R}$ contém um intervalo do tipo (a,b), com $a,\ b \in \mathbb{R}$. Assim, podemos supor que o intervalo $I = (a,b)$. Vamos mostrar que todo intervalo contém um número racional. Ou seja, vamos mostrar que:

$$\text{Para todos números reais } a,\ b \textit{ com } a < b,\ \textit{existe } r \in \mathbb{Q},\ \textit{com } a < r < b. \qquad (*)$$

Para que um número racional $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e q um número inteiro positivo, pertença ao intervalo (a,b) temos que:

$$a < \frac{p}{q} < b \Leftrightarrow aq < p < bq.$$

Isto significa que temos que encontrar um número inteiro positivo q tal que o intervalo aberto (aq,qb) possua um número inteiro p. Mas, para isso, é suficiente que o comprimento do intervalo (aq,qb) seja estritamente maior do que 1. Assim, temos que:

$$qb - qa = q(a-b) > 1 \Rightarrow q > \frac{1}{a-b}.$$

Questão: Existe de fato um tal inteiro q?

A propriedade de Arquimedes (Para todo todo número real x existe um número inteiro positivo n estritamente maior do que x) nos garante que existe um número natural $q > \frac{1}{a-b}$. Observe que, como $a-b > 0$, temos que q é um número inteiro positivo. Agora, basta tomar p como sendo $p > [qa]+1$, onde $[qa]$ significa o menor inteiro que é maior do que ou igual a qa. Logo, $p-1 \leq aq < p$, que implica por um lado que $\frac{p}{q} > a$ e, por outro lado, $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a$, o que implica $\frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a+b-a = b$.
Portanto, temos que $\frac{p}{q} \in (a,b)$, como queríamos provar [afirmação (*)]. No ítem (iii), provaremos que todo intervalo possui infinitos racionais.

(ii) Vamos mostrar que todo intervalo aberto da reta possui um número irracional. Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Podemos aplicar a afirmação (*) para o intervalo $(a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2})$. Ou seja, existe um número racional $r \in (a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2})$. Por outro lado, é fácil ver que o número $r+\sqrt{2} \in (a,b)$ e que $r+\sqrt{2}$ é irracional, pois, caso contrário, teríamos que:

$$\sqrt{2} = r + \sqrt{2} - r \ \text{ seria um número racional,}$$

como soma de dois números racionais, que é uma contradição, pois sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Portanto, todo intervalo aberto da reta possui um número irracional.

(iii) Vamos mostrar que todo intervalo da reta possui uma infinidade de números racionais e uma infinidade de números irracionais. Para isso, seja N um número inteiro maior do que ou igual a 1 e considere a coleção dos N intervalos abertos

$$\Big(a,\ a+\frac{b-a}{N}\Big),\ \Big(a+\frac{b-a}{N},\ a+\frac{2(b-a)}{N}\Big),\ \Big(a+\frac{2(b-a)}{N},\ \ldots,\ \Big(a+\frac{(N-1)(b-a)}{N}, b\Big).$$

Pelo que vimos acima, cada um destes intervalos possui um número racional e um número irracional, o que implica que o intervalo (a,b) possui pelo menos N números racionais e N números irracionais. Como isto é verdade para todo número inteiro $N \geq 1$, segue que o intervalo (a,b) possui uma infinidade de números racionais e uma infinidade de números irracionais, o que implica que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso nos reais e que que o conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso nos reais.

Problema 6.28 A medida de um ângulo dado é $\frac{180°}{n}$, onde n é um número inteiro positivo não divisível por 3.
Prove que o ângulo dado pode ser trisseccionado usando uma régua (sem marcação) e um compasso.

Solução

Como o número 3 não divide o número inteiro positivo n, segue que $MDC(3,n) = 1$. Assim, existem números inteiros a, b para os quais

$$3a + nb = 1.$$

Multiplicando cada termo da equação acima por $\frac{60°}{n}$, obtemos:

$$\frac{180° \cdot a}{n} + 60° \cdot b = \frac{60°}{n}$$

Agora, observe que, como o ângulo $\frac{180°}{n}$ é dado, segue que podemos construir os ângulos $\frac{180° \cdot a}{n}$ e $60° \cdot b$. Mas, só podemos construir com a régua e o compasso um ângulo de $\frac{180°}{m}$ se podemos construir um polígono regular com m lados. Por outro lado, foi provado por Gauss que podemos construir com a régua e compasso um polígono regular com um número de lados p, com p um número primo, se e somente se o número p é da forma $p = 2^{2^n} + 1$. Para $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, 4$, temos $p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537$. Portanto, o ângulo dado pode ser trisseccionado.

FIM