



## 30ª Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte.

### Soluções das questões - Prova da 2ª fase 2019 - Nível 1

#### PROBLEMA 1

Sabendo que  $20192019 + 20192020 + 20192021 + \dots + 20192099 = 1635556779$ , determine o valor da soma

$$S = 20192021 + 20192022 + 20192023 + \dots + 20192101.$$

#### Solução

Podemos escrever a soma  $S$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S &= 20192021 + 20192022 + 20192023 + \dots + 20192101 \\ &= (20192019 + 2) + (20192020 + 2) + (20192021 + 2) + \dots + (20192099 + 2) \\ &= 20192019 + 20192020 + 20192021 + \dots + 20192099 + \underbrace{(2 + 2 + 2 + \dots + 2)}_{81 \text{ parcelas}} \\ &= 1635556779 + 162 \\ &= 1635556941 \end{aligned}$$

#### PROBLEMA 2

A fração

$$\frac{2}{\frac{2}{\frac{2}{2^{\frac{1}{2}}+1}+1}+1} + 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{1+2^{\frac{1}{2}}+1}}$$

pode ser escrita na forma  $\frac{m}{n}$ , onde  $m$  e  $n$  são números inteiros positivos primos entre si (ou seja,  $\text{mdc}(m, n) = 1$ ).

Determine  $2m + n$ .

#### Solução

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{2}{2+1}+1} + 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{2+1}} &= \frac{2}{\frac{2}{\frac{2}{3}+1}+1} + 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{2}{\frac{2}{\frac{2}{3}+1}+1} + 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{2}{\frac{2}{\frac{6}{5}+1}+1} + 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{\frac{6}{5}}} \\
&= \frac{2}{\frac{2}{\frac{11}{5}+1}+1} + 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{\frac{11}{5}}} \\
&= \frac{2}{\frac{10}{11}+1} + 1 + \frac{10}{11} \\
&= \frac{2}{\frac{10+11+10}{11}} \\
&= \frac{22}{10+11+10} \\
&= \frac{22}{31}
\end{aligned}$$

Ora, como  $\text{mdc}(22,31) = 1$ , segue que  $m = 22$  e  $n = 31$ . Assim,  $2m + n = 2 \cdot 22 + 31 = 75$ .

### PROBLEMA 3

Jonas escreveu, em ordem crescente, a sequência com os múltiplos inteiros positivos de 13:

1326395265...

Qual é o 2.019-ésimo dígito da sequência de Jonas?

#### Solução

Existem 7 múltiplos de 13 com 2 dígitos (13, 26, 39, 52, 65, 78, 91), aparecendo na sequência, em ordem crescente, num total de  $7 \cdot 2 = 14$  dígitos; com 3 dígitos são 69 múltiplos de 13 (104, 117, 130, ..., 988), aparecendo na sequência, em ordem crescente, num total de  $69 \cdot 3 = 207$  dígitos. Nesse ponto, já temos  $14 + 207 = 221$ . Então, para atingir 2019 dígitos, faltam  $2019 - 221 = 1798$ . Como os primeiros múltiplos de 13 que vem depois 998 possuem 4 dígitos, dividimos 1798 por 4, obtendo:  $1798 = 4 \cdot 449 + 2$ . Como o primeiro múltiplo de 13 com quatro dígitos é  $13 \cdot 77 = 1001$ , segue que o  $449 + 76 = 525$ -ésimo múltiplo de 13 é igual a  $13 \cdot 525 = 6825$ . Como o próximo número inteiro múltiplo de 13 é 6838 e o resto da divisão de 1798 por 4, é igual a 2, então o 2.019º dígito da sequência de Jonas é 8.

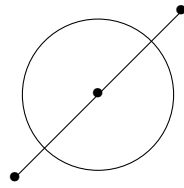
### PROBLEMA 4

Os números inteiros de 1 a 132 são escritos, igualmente espaçados e em ordem crescente, ao redor do exterior de um círculo. Segmentos de retas que passam pelo centro do círculo ligam pares desses pontos.

Qual número está ligado com o 32? Explique seu raciocínio.

#### Solução

Desenhe um segmento de reta que passe pelo centro do círculo e ligue um par qualquer desses 132 números.



Com isso, restam  $132 - 2 = 130$  números ainda para serem formados os respectivos pares. Como este primeiro segmento de reta, passando pelo centro do círculo, divide o círculo ao meio (i.e. divide na metade a quantidade dos 130 números restantes ainda não emparelhados). Isto significa que temos necessariamente 65 desses números escritos em cada semiplano determinado pela reta que contém o segmento de reta escolhido juntando o primeiro par de números. Chamemos de  $n$  o número que está ligado ao 32 por um segmento de reta passando pelo centro do círculo. Traçando o segmento de reta passando pelo centro do círculo e ligando o número 32 ao número  $n$ , existem 65 números entre 32 e  $n$  em ambos os sentidos (no sentido horário ou anti-horário). Começando em 32 e movendo-se na direção horária, (i.e. iniciando o movimento passando pelo 33), os 65 números que se encontram entre 32 e  $n$  são os números 33, 34, 35, ..., 96, 97, pois:

$$33 = 32 + 1, 34 = 32 + 2, 35 = 32 + 3, \dots, 96 = 32 + 64, 97 = 32 + 65.$$

Portanto, o próximo número após 97, no sentido horário, é o número  $n$  que está emparelhado com 32, que é o número 98.