30ª Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte.

Soluções das questões - Prova da 2ª fase 2019 - Nível 2

PROBLEMA 1

Mostre que existem apenas dois números inteiros x tais que

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) = 720.$$

Solução

O número 720 pode ser escrito como o produto de 6 números inteiros consecutivos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 720 &= \; 6.5.4.3.2.1 \\ 720 &= \; (-6).(-5).(-4).(-3).(-2).(-1) \end{aligned}$$

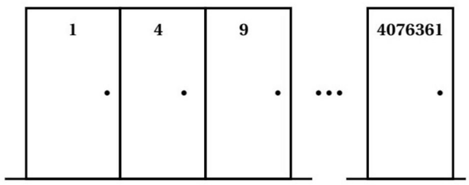
Ora, se x for inteiro, segue que $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$, $(x-5)$ e $(x-6)$ são inteiros consecutivos. Assim temos duas possibilidades a saber:

$$x-1=6, x-2=5, x-3=4, x-4=3, x-5=2, x-6=1 \Longrightarrow x=7.$$

$$x-1=-1, x-2=-2, x-3=-3, x-4=-4, x-5=-5, x-6=-6 \Longrightarrow x=0.$$

PROBLEMA 2

Os 2019 armários dos 2019 alunos de uma escola são numerados com os quadrados dos 2019 primeiros naturais positivos, ou seja, o primeiro armário tem o número $1^2 = 1$, o segundo armário tem o número $2^2 = 4$, o terceiro armário tem o número $3^2 = 9$, e assim até o último armário que tem o número $2019^2 = 4.076.361$.



Quantos dígitos foram utilizados para numerar os cem primeiros armários?

Solução

Vamos dividir os armários em grupos pela quantidade de dígitos usados para numerá-los:

- GRUPO 1 - Usando 1 dígito: 3 armários, os de números $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$;

- GRUPO 2 - Usando 2 dígitos: $9-3=6$ armários, os de números $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$;
- GRUPO 3 - Usando 3 dígitos: $31-9=22$ armários, os de números $10^2=100$, $11^2=121, \ldots, 31^2=961$;
- GRUPO 4 - Usando 4 dígitos: $99-31=68$ armários, os de números $32^2=1024$, $33^2=1089, \ldots, 99^2=9801$;
- GRUPO 5 - Usando 5 dígitos: apenas o armário $100^2=10000$.

Portanto, foram usados $3+2\cdot 6+3\cdot 22+4\cdot 68+5\cdot 1=358$ dígitos para numerar os cem primeiros armários.

PROBLEMA 3

Se
$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+20}=\frac{m}{n},$$
onde m e n são inteiros positivos primos entre si, isto é, $mdc(m,n)=1$, determine o valor de $m+n$.

Solução

Sendo $S_n=1+2+3+\cdots+n$, segue que

$$S_n=1+2+3+\cdots+n$$
$$S_n=n+(n-1)+\cdots+1$$

adicionando membro a membro, segue que

$$2s_n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{ parcelas}}\Longrightarrow S_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Assim,

$$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{\frac{2.3}{2}}=\frac{2}{2.3}$$
$$\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{\frac{3.4}{2}}=\frac{2}{3.4}$$
$$\frac{1}{1+2+3+4}=\frac{1}{\frac{3.4}{2}}=\frac{2}{3.4}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+20}=\frac{1}{\frac{20.21}{2}}=\frac{2}{20.21}$$

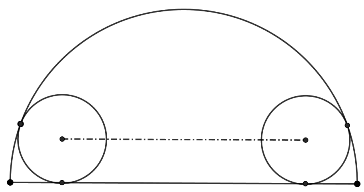
Adicionando membro a membro as igualdades acima, segue que

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{1+2}+\tfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\tfrac{1}{1+2+\cdots+20} &= \frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\cdots+\frac{2}{20.21}\\
&= 2\left[\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{20.21}\right]\\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right]\\
&= 2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{21}\right]\\
&= 2\cdot\frac{19}{2.21}\\
&= \frac{19}{21}
\end{aligned}$$

Como $mdc(19,21)=1$, segue que $m=19$ e $n=21$, assim, $m+n=19+21=40$.

PROBLEMA 4

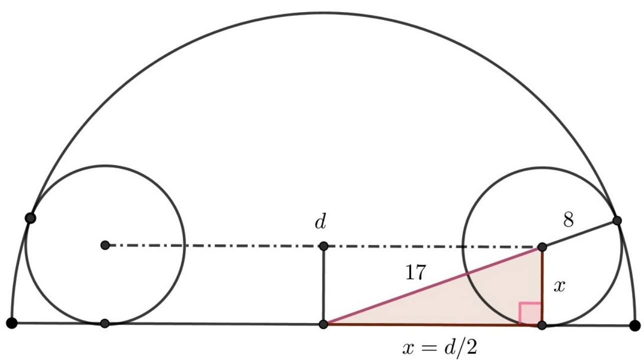
Duas circunferências de raio $8cm$ são tangentes a uma semicircunferência de raio $25cm$ e ao seu diâmetro como ilustra a figura a seguir.



Qual a distância, em cm, entre os centros das duas circunferências menores?

Solução

Seja d a distância entre os centros das circunferências menores. De acordo com o enunciado podemos construir a figura abaixo:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo sombreado na figura acima, segue que

$$17^2=8^2+x^2 \Rightarrow x=15 \Rightarrow \frac{d}{2}=15 \Rightarrow d=30cm.$$