30ª Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte.

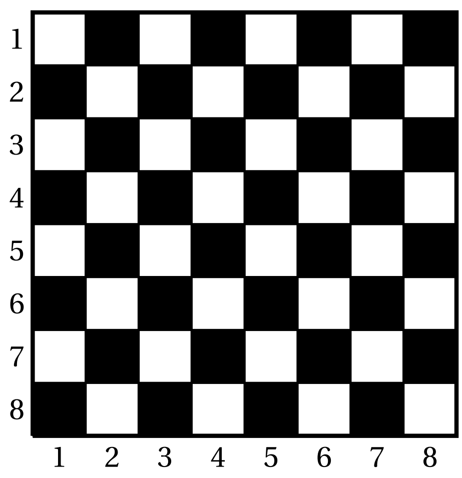
Soluções das questões - Prova da 2ª fase 2019 - Nível 3

PROBLEMA 1

Num tabuleiro de xadrez 8×8 as linhas são numeradas de 1 a 8, de cima para baixo e as colunas numeradas de 1 a 8, da esquerda para a direita. Laura colocou em cada casa do tabuleiro um número de fichas igual à soma do número correspondente à posição da linha mais o correspondente ao número da coluna. Por exemplo, na casa localizada na segunda linha e terceira coluna ela colocou $2+3=5$ fichas.
Quantas fichas Laura colocou no tabuleiro?

Solução

Considere o tabuleiro 8×8.



Para cada linha i, com $1 \leq i \leq 8$, os números colocados nessa linha são

$$i+1, i+2, i+3, i+4, i+5, i+6, i+7 \text{ e } i+8.$$

Portanto a soma das fichas colocadas na linha i é igual $8i+S$, onde S é a soma dos números das colunas: $S = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$. Assim, temos que total de fichas colocadas no tabuleiro é igual a:

$$\sum_{i=1}^{8}(8 \cdot i + S) = 8\sum_{i=1}^{8} i + 8 \cdot S = 8 \cdot S + 8 \cdot S = 16 \cdot S = 16 \cdot 36 = 576.$$

PROBLEMA 2

Denotamos por $S(n)$ a soma dos n primeiros inteiros positivos. Um inteiro positivo n é dito **fantástico** quando n e $S(n)$ são ambos quadrados pefeitos. Por exemplo, 49 é **fantástico**, pois

$$49 = 7^2 \text{ e } S(49) = 1+2+3+\ldots+49 = 1225 = 35^2$$

são ambos quadrados perfeitos.
Encontre um inteiro $n > 49$ que seja fantástico.

Solução

Ora, como queremos que n seja um quadrado perfeito, segue que deve existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^2$.

Assim,

$$\begin{aligned} S(n) &= 1+2+3+\ldots+n \\ &= 1+2+3+\ldots+k^2 \\ &= \frac{k^2(k^2+1)}{2}. \end{aligned}$$

Como queremos que $S(n)$ também seja um quadrado perfeito e $S(n) = \frac{k^2(k^2+1)}{2}$, basta que $\frac{k^2+1}{2}$ seja um quadrado perfeito, isto é, basta que existe um $t \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{k^2+1}{2} = t^2$. Mas,

$$\frac{k^2+1}{2} = t^2 \Leftrightarrow k^2+1 = 2t^2.$$

Portanto, k^2+1 deve ser ser par, o que revela que k deve ser ímpar (além disso, note que k^2+1 é o dobro de um quadrado). Assim, olhando para a sequência dos quadrados dos ímpares, a saber

$$1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, \ldots$$

pode-se ver que 41 é o primeiro ímpar (maior que 7) tal que k^2+1 é o dobro de um quadrado, pois

$$41^2+1 = 1681+1 = 1682 = 2 \times 841 = 2 \times 29^2.$$

Portanto, $n = 41^2 = 1681$ é fantástico, visto que

$$S(1681) = 1+2+3+\ldots+1681 = \frac{1681.(1681+1)}{2} = 41^2.29^2 = 1189^2.$$

PROBLEMA 3

Determine todos os números reais positivos x para os quais

$$(8^x-5^x)(7^x-2^x)(6^x-4^x)+(9^x-4^x)(8^x-3^x)(5^x-2^x) = 105^x.$$

Solução

Note que $x = 1$ é solução da equação pois,

$$\begin{aligned} (8^1-5^1)(7^1-2^1)(6^1-4^1)+(9^1-4^1)(8^1-3^1)(5^1-2^1) &= 3.5.2+5.5.3 \\ &= 30+75 \\ &= 105 \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $x = 1$ é a única raiz real positiva da equação acima. De fato,

$$(8^x - 5^x)(7^x - 2^x)(6^x - 4^x) + (9^x - 4^x)(8^x - 3^x)(5^x - 2^x) = 105^x \Leftrightarrow$$

$$5^x\left[\left(\frac{8}{5}\right)^x - 1\right]7^x\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x\right]3^x\left[2^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x\right] + 7^x\left[\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right]3^x\left[\left(\frac{8}{3}\right)^x - 1\right]5^x\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right] = 105^x \Leftrightarrow$$

$$5^x7^x3^x\left[\left(\frac{8}{5}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x\right]\left[2^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x\right] + 7^x3^x5^x\left[\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right]\left[\left(\frac{8}{3}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right] = 105^x \Leftrightarrow$$

$$105^x\left[\left(\frac{8}{5}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x\right]\left[2^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x\right] + 105^x\left[\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right]\left[\left(\frac{8}{3}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right] = 105^x \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(\frac{8}{5}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x\right]\left[2^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x\right] + \left[\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right]\left[\left(\frac{8}{3}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right] = 1$$

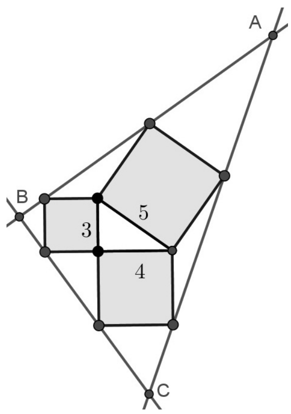
Note que a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$f(x) = \left[\left(\frac{8}{5}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x\right]\left[2^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x\right] + \left[\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right]\left[\left(\frac{8}{3}\right)^x - 1\right]\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right]$$

é uma função estritamente crescente (portanto injetiva), o que revela que ela só pode atingir o valor 1 para um único valor de x. Como $f(1) = 1$, segue que $x = 1$ é a única solução da equação original.

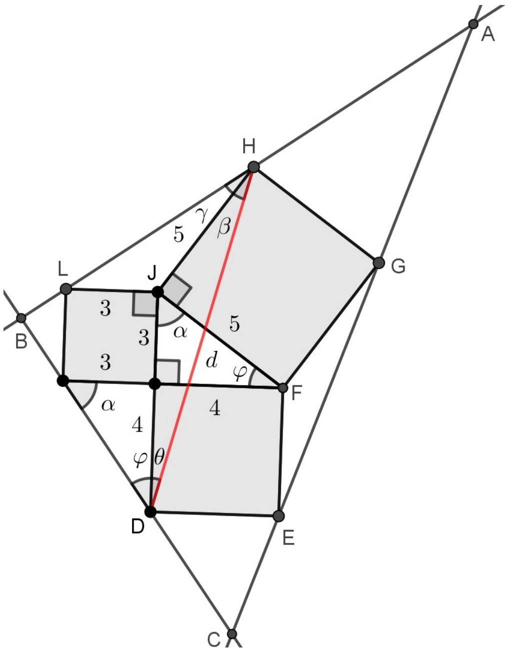
PROBLEMA 4

Num triângulo cujos lados medem $3, 4$ e 5 construímos quadrados sobre os seus lados e passando por alguns vértices desses quadrados construímos o triângulo ABC, conforme ilustra a figura ao lado. O triângulo ABC é retângulo? Justifique a sua resposta!



Solução

Trançando o segmento DH e assinalando alguns ângulos obtemos a figura abaixo:



Vamos mostrar que o ΔABC não é retângulo. A ideia é mostrar que os ângulos $\gamma+\beta$ e $\varphi+\theta$ não são complementares, isto é,

$$(\gamma+\beta)+(\varphi+\theta) \neq 90^0$$

Para isso vamos mostrar que $\cos(\gamma+\beta) \neq sen(\varphi+\theta)$. (lembre-se que se dois ângulos são complementares, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro).

Note que $sen\varphi = \cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $sen\alpha = \cos\varphi = \frac{4}{5}$. Aplicando a lei dos cossenos no ΔDHJ,

$$\begin{aligned} d^2 &= 5^2+7^2-2.5.7.\cos(\alpha+90^o) \\ &= 5^2+7^2+2.5.7.\alpha \\ &= 25+49+70.\frac{4}{5} \\ &= 130 \end{aligned}$$

Aplicando novamente a lei dos cossenos no ΔDHJ, segue que:

$$7^2 = 5^2+130-2.5.\sqrt{130}.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{53\sqrt{130}}{650} \Rightarrow sen\beta = \frac{21\sqrt{130}}{650}.$$

$$5^2 = 7^2+130-2.7.\sqrt{130}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{11\sqrt{130}}{130}v \Rightarrow sen\theta = \frac{3\sqrt{130}}{130}.$$

Por outro lado, no ΔJHL, temos que:

$$\begin{aligned} HL^2 &= 3^2+5^2-2.3.5.\cos(180^o-\alpha) \\ &= 9+25-30(-\cos\alpha) \\ &= 9+25+30.\frac{3}{5} \\ &= 52 \end{aligned}$$

Aplicando novamente a lei dos cossenos ΔJHL, temos:

$$3^3 = 52+5^2-2.\sqrt{52}.5\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{17\sqrt{13}}{65} \Rightarrow sen\gamma = \frac{6\sqrt{13}}{65}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\cos(\gamma+\beta) &= \cos\gamma.\cos\beta - sen\gamma.sen\beta \\ &= \frac{17\sqrt{13}}{65}.\frac{53\sqrt{130}}{650} - \frac{6\sqrt{13}}{65}.\frac{21\sqrt{130}}{650} \\ &= \frac{31\sqrt{10}}{130}\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}sen(\varphi+\theta) &= sen\varphi.\cos\theta + sen\theta.\cos\varphi \\ &= \frac{3}{5}.\frac{11\sqrt{130}}{130} + \frac{3\sqrt{130}}{130}.\frac{4}{5} \\ &= \frac{9\sqrt{130}}{130}\end{aligned}$$

Portanto, $\cos(\gamma+\beta) \neq sen(\varphi+\theta)$., o que revela que os ângulos $\gamma+\beta$ e $\varphi+\theta$ não são complementares, isto é, $(\gamma+\beta)+(\varphi+\theta) \neq 90^o$. Então, o ângulo interno do vértice A do ΔABC não é reto, ou seja, o ΔABC não é retângulo.