30ª Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte.

Soluções das questões - Prova da $2^{\underline{a}}$ fase 2019
Nível universitário.

PROBLEMA 1

Temos 2^m folhas de papel, com o número 1 escrito em cada uma delas. Realizamos a operação seguinte. De cada vez escolhemos duas folhas distintas; se os números sobre as duas folhas são a e b, apagamos estes números e escrevemos o número $a+b$ em ambas as folhas.
Provar que, depois de realizarmos $m.2^{m-1}$ operações, a soma dos números em todas as folhas é no mínimo 4^m.

Solução

Seja P_k o produto dos números nas folhas após a realização da k-ésima operação. Suponha que na execução da $(k+1)$-ésima operação os números a e b sejam substituídos por $a+b$. Isto significa que no produto dos números das folhas o valor ab será substituído por $(a+b)^2$ e os outros fatores não se alteram. Como

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab,$$

temos que $P_{k+1} \geq 4 \cdot P_k$.
Como no início temos $P_1 = 1$, é fácil ver, por indução, que terems $P_k \geq 4^k$, para todo número inteiro k maior do que ou igual a zero. Em particular, temos:

$$P_{m\cdot 2^{m-1}} \geq 4^{m\cdot 2^{m-1}} = (2^m)^{2^m}.$$

Logo, pela desigualdades das médias Aritmétca e Geométrica, depois de realizarmos $m \cdot 2^{m-1}$ operações, a soma dos números escritos nas folhas é no mínimo

$$2^m \cdot \sqrt[2^m]{P_{m\cdot 2^{m-1}}} \geq 2^m \cdot 2^m = 4^m$$

PROBLEMA 2

Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais tais que $a_0 = 0, a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 - \frac{a_{n-1}}{a_n}}$ para $n \geq 1$.

1. Mostre que $a_n = 2sen\frac{\pi}{2^n}$.
2. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n$.

Solução

1. Vamos usar indução sobre n.

   - Para $n = 0$, tem-se que $a_0 = 2sen\frac{\pi}{2^0} = 2sen\pi = 0$.
   - Para $n = 1$, $a_1 = 2sen\frac{\pi}{2^1} = 2sen\frac{\pi}{2} = 2$.
   - Suponha que $a_n = 2sen\frac{\pi}{2^n}$ para um certo inteiro n (hipotese da indução).
   - Para finalizar, vamos mostrar que o resultado é verdadeiro para $n+1$, isto é,

   $$a_{n+1} = 2sen\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

   De fato,

   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 - \frac{a_{n-1}}{a_n}} = \sqrt{2 - \frac{2sen\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2sen\frac{\pi}{2^n}}} \\ &= \sqrt{2 - \frac{2sen\frac{\pi}{2^n}cos\frac{\pi}{2^n}}{sen\frac{\pi}{2^n}}} = \sqrt{2 - 2cos\frac{\pi}{2^n}} \\ &= \sqrt{4sen^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2sen\frac{\pi}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

2. Utilizando a fórmula do a_n deduzida no item anterior, temos:

   $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} 2^n a_n &= \lim_{n\to\infty} 2^n 2sen\frac{\pi}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} sen\frac{\pi}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\pi \frac{sen\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \\ &= 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{sen\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \\ &= 2\pi.1 = 2\pi \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Sejam $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tais que $AB - BA = A$. Para cada matriz $x = (x_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$, chama-se de traço da matriz X a soma dos elementos da diagonal principal de X, isto é,

$$tr(X) = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}.$$

Calcule $tr(A^{2019})$.

Solução

Tem-se que

$$tr(A) = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0.$$

Assim, para cada $p \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$tr(A^{p-1}BA) = tr((A^{p-1}B)A) = tr(A(A^{p-1}B)) = tr(A^pB).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} tr(A^p) &= tr(A^{p-1}A) = tr(A^{p-1}(AB - BA)) \\ &= tr(A^pB) - tr(A^{p-1}BA) \\ &= tr(A^pB) - tr(A^pB) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Então $tr(A^{2019}) = 0$.

PROBLEMA 4

Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx$.

Solução

Seja $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx$. Fazendo a mudança de variáveis $x = \frac{\pi}{2} - t$, segue que $dx = -dt$ e

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{e^{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}}{e^{sen(\frac{\pi}{2} - t)} + e^{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}} (-dt) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{e^{sent}}{e^{\cos t} + e^{sent}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{sent}}{e^{sent} + e^{\cos t}} dt \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx \\ I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{senx}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx \end{cases}$$

Adicionando membro a membro, segue que

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{senx}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{senx} + e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.