30ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO RIO GRANDE DO NORTE 2019- PRIMEIRA FASE.
NÍVEL UNIVERSITÁRIO.

Para cada questão, assinale **uma** alternativa como a resposta correta.

NOME DO(A) ESTUDANTE: ______________________________

UNIVERSIDADE: ______________________________

1. O fatorial de 35, isto é, o produto $35 \times 34 \times 33 \times \ldots \times 2 \times 1$, é um número com 41 algarismos:

$$35! = 10333147966386144929\square 66651337523200000000.$$

No lugar do algarismo central está um quadrado. O algarismo que teve o seu lugar ocupado pelo quadrado é:

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 4
- (d) 5
- (e) 6

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Como o 11 é um dos fatores do número $35!$, segue que $35!$ é um múltiplo de 11. Usando o critério de divisibilidade por 11, segue que a soma dos algarismos que ocupam as posições ímpares é $66+\square$. Já a soma dos algarismos que ocupam as posições pares é 72. Assim, $66+\square-72$ tem que ser um múltiplo de 11. Assim se $66+\square-72=0$, segue que $\square = 6$.

2. Para cada número real x, definimos $\lfloor x \rfloor$ como sendo o maior número inteiro que não supera x. Se

$$\alpha = \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}}_{2019 \text{ radicais}} \quad e \quad \beta = \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}}}}_{2019 \text{ radicais}},$$

podemos afirmar que $\lfloor \alpha+\beta \rfloor$ é igual a:

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 4

- ◯ (d) 5
- ◯ (e) 6

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Inialmente note que:

$$\alpha=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}>\sqrt{6}\simeq 2{,}4 \text{ e } \beta=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}}}>\sqrt[3]{6}\simeq 1{,}8.$$

Assim, $\alpha+\beta>2{,}4+1{,}8\Rightarrow\alpha+\beta>4{,}2$. Por outro lado, pode-se mostrar por indução que $\alpha<3$ e $\beta<2$, o que revela que $\alpha+\beta<3+2\Rightarrow\alpha+\beta<5$. Diante do exposto, segue que $\lfloor\alpha+\beta\rfloor=4$.

3. Considere os polinômios

$$p(x)=(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)$$
$$q(x)=(x-\sqrt{2})(x^2+2x+2)$$
$$r(x)=(x^2+2)(x^8+16)$$

O coeficiente de x^4 no polinômio $f(x)=p(x)\cdot q(x)\cdot r(x)$ é:

- ◯ (a) 0
- ◯ (b) 1
- ◯ (c) 2
- ◯ (d) 3
- ◯ (e) 4

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Note que

$$\begin{aligned} f(x) = & \; p(x)\cdot q(x)\cdot r(x) \\ = & \; (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)[(x^2+2)-2x][(x^2+2)+2x](x^8+16) \\ = & \; (x^2)(x^2+2)[(x^2+2)^2-4x^2](x^8+16) \\ = & \; (x^4-4)(x^4+4)(x^8+16) \\ = & \; (x^8-16)(x^8+16)=x^{16}-256. \end{aligned}$$

O que revela que o coeficiente de x^4 em f é 0.

4. O resto da divisão do número $3^3\cdot 33^{33}\cdot 333^{333}\cdot 3333^{3333}$ por 100 é:

- ◯ (a) 11
- ◯ (b) 13
- ◯ (c) 15
- ◯ (d) 17
- ◯ (e) 19

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

O resto da divisão do número $3^3 \cdot 33^{33} \cdot 333^{333} \cdot 3333^{3333}$ por 100 é um inteiro $0 \le k < 100$ tal que

$$3^3 \cdot 33^{33} \cdot 333^{333} \cdot 3333^{3333} \equiv k(\mathrm{mod} 100).$$

Note que

$$3^3 \cdot 33^{33} \cdot 333^{333} \cdot 3333^{3333} \equiv 3^3.33^{33}.33^{33}.33^{3333}(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$$
$$3^3.33^{33}.33^{33}.33^{3333} \equiv 3^3.33^{3399}(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$$

Como $\mathrm{mdc}(33,100) = 1$, pelo Teorema de Euler segue que $33^{\varphi(100)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 100)$. Como $100 = 2^2.5^2$ segue que $\varphi(100) = 100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 100.\frac{1}{2}.\frac{4}{5} = 40$. Assim,

$$33^{\varphi(100)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 100) \Rightarrow 33^{40} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 100).$$

Por outro lado, $3399 = 40 \times 84 + 39$. Portanto,

$$33^{40} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 100) \Rightarrow (33^{40})^{84} \equiv 1^{84}(\mathrm{mod}\ 100) \Rightarrow 33^{3360} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 100).$$

Multiplicando membro a membro por 33^{39}, segue que $33^{3360}.33^{39} \equiv 1.33^{39}(\mathrm{mod}\ 100)$, ou seja, $33^{3399} \equiv 33^{39}(\mathrm{mod}\ 100)$. Por fim,

$$33^{39} = (33^3)^{13} \equiv 37^{13} \equiv 97(\mathrm{mod}\ 100).$$

Ora, como$3^3.33^{33}.33^{33}.33^{3333} \equiv 3^3.33^{3399}(\mathrm{mod} 100)$, segue que

$$3^3.33^{33}.33^{33}.33^{3333} \equiv 3^3.33^{3399} \equiv 27.97 \equiv 19(\mathrm{mod} 100),$$

o que revela que o resto da divisão do número $3^3.33^{33}.33^{33}.33^{3333}$ por 100 é 19.

5. A quantidade de números primos na lista

$$12321,\ 1234321,\ 123454321,\ 12345654321,\ 1234567654321,$$
$$123456787654321,\ 12345678987654321$$

é igual a:

- ◯ (a) 0
- ◯ (b) 1
- ◯ (c) 2
- ◯ (d) 3
- ◯ (e) 4

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Note que 12321 é divisível por 3 (pois a soma dos seus algarismos é divisível por 3); 1234321 é divisível por 7; 12345654321 e 123456787654321 são divisíveis por 11 (pois a diferença entre soma alternada dos seus algarismos é divisível por 11); 1234567654321 e 12345678987654321 são divisíveis por 3 (pois a soma dos seus algarismos é divisível por 3). Assim resta apenas analisar os números 123454321 e 1234567654321 cujas decomposições em fatores primos são

$$123454321 = 41^2 \cdot 271^2 \ \text{ e } \ 1234567654321 = 239^2 \cdot 4649^2.$$

Portanto nenhum dos números apresentados é primo.

6. A quantidade de soluções reais da equação $4^x + 9^x + 49^x = 6^x + 14^x + 21^x$ é:

- ◯ (a) 0
- ◯ (b) 1
- ◯ (c) 2
- ◯ (d) 3
- ◯ (e) 4

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Fazendo a as mudanças de variáveis $2^x = a, 3^x = b$ e $7^x = c$, podemos reescrever a equação $4^x + 9^x + 49^x = 6^x + 14^x + 21^x$ da segunte forma:

$$(2^x)^2 + (3^x)^2 + (7^x)^2 = 2^x.3^x + 2^x.7^x + 3^x.7^x \Leftrightarrow$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Leftrightarrow$$
$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow$$
$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

Assim,

$$a = b = c \Leftrightarrow 2^x = 3^x = 7^x \Leftrightarrow x = 0,$$

é a única solução da equação.

7. Se $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ é tal que $\sec\alpha + sen\alpha + \tan\alpha = m$, podemos afirmar que

$$A = \sqrt{\sec\alpha} + \sqrt{sen\alpha}\sqrt{\tan\alpha} + \sqrt{\cos\alpha}$$

é igual a:

- ◯ (a) $\sqrt{m}$
- ◯ (b) $\sqrt{m+1}$
- ◯ (c) $2\sqrt{m+1}$
- ◯ (d) $\sqrt{2(m-1)}$
- ◯ (e) $\sqrt{2(m+1)}$

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Tem-se que

$$\begin{aligned} A = & \sqrt{\sec\alpha} + \sqrt{\operatorname{sen}\alpha}\sqrt{\tan\alpha} + \sqrt{\cos\alpha} \\ = & \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} + \sqrt{\operatorname{sen}\alpha}\frac{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}{\sqrt{\cos\alpha}} + \sqrt{\cos\alpha} \\ = & \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sec\alpha + \operatorname{sen}\alpha + \tan\alpha = m \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{sen}\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 1 = m + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}(1 + \operatorname{sen}\alpha) + (1 + \operatorname{sen}\alpha) = m + 1 \Rightarrow (1 + \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) = m + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} = m+1.$$

Por fim, como $A = \dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}$, segue que:

$$a^2 = \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos\alpha} = \frac{2(1+\operatorname{sen}\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} = 2(m+1) \Rightarrow A = \sqrt{2(m+1)}.$$

8. Quantas raízes negativas possui a equação $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$?

   ◯ (a) 0

   ◯ (b) 1

   ◯ (c) 2

   ◯ (d) 3

   ◯ (e) 4

   Solução A resposta correta é a alternativa (a).

   Podemos escrever $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ da seguinte forma $x^4 - 4x^2 + 4 = 5x^3 + 7x$. Para qualquer número real $\alpha < 0$ o segundo membro da expressão anterior é negativo, i.e., $5\alpha^3 + 7\alpha < 0$. Por outro lado, o primeiro membro quando $x = \alpha$ fica $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 4 = (\alpha^2 - 2)^2 \geq 0$. Diante do exposto, para $\alpha < 0$ não pode ocorrer a igualdade $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 4 = 5\alpha^3 + 7\alpha$ (pois o primeiro membro é não negativo enquanto que o segundo membro é estritamente negativo), o que revela que a equação polinomial $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ não possui raízes reais negativas.

9. Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ΔABC. Se a, b, c (nessa ordem) são termos consecutivos de uma progressão aritmética, podemos afirmar que $\cos\hat{A}$ é igual a:

   ◯ (a) $\frac{3b-4c}{2c}$

   ◯ (b) $\frac{4c-3b}{2c}$

   ◯ (c) $\frac{3b-4c}{2a}$

   ◯ (d) $\frac{3a-4c}{2c}$

   ◯ (e) $\frac{3c-4a}{2b}$

   Solução A resposta correta é a alternativa (b).

   Ora, como a, b e c são nessa ordem termos consecutivos de uma progressão aritmética, segue que $2b = a + c$. Assim,

$$\begin{aligned}
\cos\hat{A} &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
&= \frac{b^2+c^2-(2b-c)^2}{2bc} \\
&= \frac{b^2+c^2-4b^2+4bc-c^2}{2bc} \\
&= \frac{4bc-3b^2}{2bc} \\
&= \frac{4c-3b}{2c}
\end{aligned}$$

10. Seja A uma matriz $n\times n$ cujos elementos são números reais tal que $A^{k+1}=O_n$, para algum $k\in\mathbb{Z}$ (onde O_n representa a matriz nula $n\times n$). Podemos afirmar que

$$\det\left(I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}A^k\right)$$

é igual a

- ◯ (a) -1
- ◯ (b) 0
- ◯ (c) 1
- ◯ (d) k
- ◯ (e) 2^k

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

A expocencial de uma matriz $A\in M(n,\mathbb{R})$ é dada por

$$e^A=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}.A^j=I+A+\frac{1}{2!}.A^2+\frac{1}{3!}.A^3+\ldots+\frac{1}{n!}A^n+\frac{1}{(n+1)!}.A^{n+1}+\ldots$$

Ora, no caso da questão temos que $A^{k+1}=0_n$ para algum $k\in\mathbb{Z}$ (quando isso ocorre dizemos que a matriz a é nilpotente), segue que $A^s=0_n$ para todo $s\geq k+1$. Nesse caso,

$$e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}A^k.$$

Portanto,

$$\det\left(I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}A^k\right)=\det(e^A).$$

Por outro lado, $\det(e^A)=e^{tr(A)}$. Por outro lado, o traço de uma matriz é igual a soma dos seus autovalores. Como A é nilpotente, segue que todos os seus autovalores são iguais a 0. Assim $tr(A)=0$, o que revela que

$$\det\left(I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}A^k\right)=\det(e^A)=e^{tr(A)}=e^0=1.$$

11. Seja $h(x)=x.g(x)$, onde $g(x)=f^{-1}(x)$. A tabela a seguir fornece alguns valores assumidos por $f(x)$ e por sua derivada $f'(x)$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	4	-1
3	5	2
5	1	3

O valor de $h'(5)$ é:

- ◯ (a) $\frac{3}{2}$
- ◯ (b) $\frac{7}{2}$
- ◯ (c) $\frac{11}{2}$

(d) $\frac{13}{2}$

(e) $\frac{17}{2}$

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Derivando $h(x) = xg(x)$, segue que $h'(x) = 1.g(x) + x.g'(x)$. Assim, $h'(5) = g(5) + 5.g'(5)$. Portanto,

$$h'(5) = 3 + 5.\frac{1}{f'(g(5))} = 3 + 5.\frac{1}{f'(3)} = 3 + 5.\frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

12. Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz às seguintes condições:

- $f(1000) = 999$;
- $f(x).f(f(x)) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor de $f(500)$ é:

(a) 1

(b) $\frac{1}{500}$

(c) $\frac{1}{999}$

(d) -1

(e) $\frac{1}{100}$

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Se $y = f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $y \in Im(f)$. Nesse caso,

$$f(x).f(f(x)) = 1 \Rightarrow y.f(y) = 1 \Rightarrow f(y) = \frac{1}{y}, \forall i \in Im(f).$$

Isso significa que para cada $y \in Im(f)$ a função f associa o valor $\frac{1}{y}$. Ora, como $999 \in Im(f)$, pois $999 = f(1000)$, segue que $f(999) = \frac{1}{999}$. Assim $\frac{1}{999} \in Im(f)$. Ora, como $\frac{1}{999}$ e 999 são elementos do conjunto imagem de f, e $\frac{1}{999} < 500 < 999$, segue pelo Teorema do valor intermediário que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 500$, ou seja, $500 \in Im(f)$. Como f associa para cada valor $y \in Im(f)$ o valor $\frac{1}{y}$, segue que $f(500) = \frac{1}{500}$.

13. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva da função $f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$. Podemos afirmar que $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é igual a:

(a) $-\frac{\pi}{2}$

(b) $\frac{\pi}{2} \ln 3$

(c) $\sqrt{\pi}$

(d) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(e) $-\frac{\pi}{6}$

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Aplicando integração por partes, segue que

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{x}{\operatorname{sen} x}dx = (-x\ln|\csc x - \operatorname{cotg} x|)_{\pi/3}^{2\pi/3} + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \ln|\csc x - \operatorname{cotg} x|dx$$

A integral $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \ln|\csc x - \operatorname{cotg} x|dx$ é igual a 0, pois os pontos $\pi/3$ e $2\pi/3$ são simétricos em relação a $\pi/2$ (onde a função que está no integrando se anula, e além disso o gráfico dessa função é simétrico em relação ao ponto $x = \pi/2$, ficando abaixo do eixo x no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ e acima do eixo x no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Além disso, fazendo as contas em $(-x\ln|\csc x - \operatorname{cotg} x|)_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{\pi}{2}\ln 3$. Portanto,

$$F\left(\frac{2\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{x}{\operatorname{sen} x}dx = \frac{\pi}{2}\ln 3.$$

14. Um alfabeto possui cinco letras: a, b, c, d e e. Nesse alfabeto, a quantidade de palavras com n letras e com um número par de letras "a" é igual a:

- (a) $\frac{5^n+3^n}{2}$
- (b) $\frac{5^n-3^n}{2}$
- (c) $\frac{15^n}{3}$
- (d) $\frac{\sqrt{15^n}}{5}$
- (e) $\frac{15^n-5^n-3^n}{3}$

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

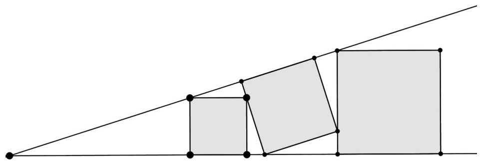
Inicialmente consideremos a seguinte pergunta (que não é a pergunta da questão): Quantas palavras de n letras contendo apenas as letras A e B podemos formar, de modo que a palavra contenha uma quantidade par de letras A?.

Se consirerarmos uma "subpalavra" com $n-1$ letras (com uma quantidade par de letras A) para que a palavra final que tem n letras devemos, nesse caso, necessariamente completar com a letra B para que a palavra final ainda permaneça com uma quantidade par de letras A. Por outro lado se considerarmos uma 'subpalavra" com $n-1$ letras (com uma quantidade ímpar de letras A) para que a palavra final que tem n letras devemos, nesse caso, necessariamente completar com a letra A para que a palavra final ainda permaneça com uma quantidade par de letras A. Portanto a quantidade de palavras com n letras em que a quantidade de letras iguais a A é par é igual a quantidade de "subpalavras" com $n-1$ letras, que é igual a 2^{n-1}, ou seja é a metade do número total de palavras com n letras que é 2^n.

Feita essa observação vamos à solução na questão:

Nesse alfabeto, o número total de palavras com n letras é 5^n. O número de palavras de n letras em que não aparecem as letras a e b simultaneamente é 3^n. Seja X o conjunto das $5^n - 3^n$ palavras em que a ou b aparecem. Agora vamos particionar o conjunto X em subconjuntos $X_i \subset X$ da seguinte forma: duas palavras p e p' pertencem ao mesmo X_i se, e somente se, a localização das letas c, d e e são exatamente as mesmas nas duas palavras. Isso significa que existem exatamente tantos conjuntos $x_i \subset X$, quantas fores as sequências de a's e b's. Pela nossa observação inicial, metade das sequências, isto é $\frac{5^n-3^n}{2}$ possuem uma quantidade par de latras a. Diante do exposto a a quantidade de palavras com n letras e com um número par de letras "a" é igual a $3^n + \frac{5^n-3^n}{2} = \frac{5^n+3^n}{2}$.

15. Na figura abaixo as medidas dos lados dos quadrados menores são 3 e 4.

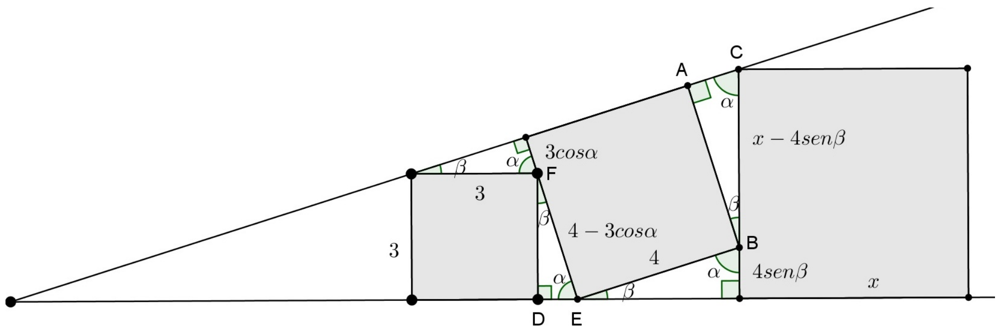


A medida x do lado do quadrado maior é:

- ◯ (a) $\frac{11}{3}$
- ◯ (b) $\frac{13}{3}$
- ◯ (c) $\frac{14}{3}$
- ◯ (d) $\frac{16}{3}$
- ◯ (e) $\frac{19}{4}$

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Observe a figura a seguir, onde alguns ângulos e algumas medidas estão indicadas



No triângulo ABC, tem-se que

$$\cos\beta = \frac{4}{x - 4\,\mathrm{sen}\,\beta} \Rightarrow x\cos\beta - 4\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta = 4.$$

No trângulo DEF,

$$\cos\beta = \frac{3}{4 - 3\cos\alpha} \Rightarrow 4\cos\beta - 3\cos\alpha\cos\beta = 3.$$

Temos então

$$\begin{cases} x\cos\beta - 4\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta = 4 \\ 4\cos\beta - 3\cos\alpha\cos\beta = 3. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3 e a segunda por 4, segue que

$$\begin{cases} 3x\cos\beta - 12\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta = 12 \\ 16\cos\beta - 12\cos\alpha\cos\beta = 12. \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro essas duas equações, seque que $(3x - 16)\cos\beta = 0$. Ora, como $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, segue que $\cos\beta \neq 0$. Portanto,

$$(3x - 16)\cos\beta = 0 \Rightarrow 3x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{3}.$$

16. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função dada por $f(x)=x^3+x-8$. A equação

$$2.f(x)+3.f^{-1}(x)=10,$$

possui

- ◯ (a) apenas uma solução real.
- ◯ (b) exatamente duas solução real.
- ◯ (c) exatamente três solução real.
- ◯ (d) exatamente quatro solução real.
- ◯ (e) não possui soluções reais.

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Note que $f'(x)=3x^2+1>0$ para todo x real, seque que f (e sua inversa) são funções estritamente crescentes e portanto bijeções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o que revela que a função $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $g(x)=2.f(x)+3.f^{-1}(x)$ é uma bijeção $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o que revela que existe um único $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $g(\alpha)=10$.

17. Seja $(f_n)_{n\geq 0}$ a sequência de Fibonacci; $f_0=0, f_1=1$ e $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ para todo inteiro $n\geq 0$. Sabe-se que

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Com relação à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{n-1}.f_{n+2}}{f_n^2.f_{n+1}^2}$, podemos afirmar que:

- ◯ (a) converge para 1.
- ◯ (b) converge para $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- ◯ (c) converge para $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- ◯ (d) converge para $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- ◯ (e) é uma série divergente.

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Inicialmente note que

$$\frac{1}{f_n^2}-\frac{1}{f_{n+1}^2}=\frac{f_{n+1}^2-f_n^2}{f_n^2.f_{n+1}^2}=\frac{(f_{n+1}-f_n)(f_{n+1}-f_n)}{f_n^2.f_{n+1}^2}=\frac{f_{n-1}.f_{n+2}}{f_n^2.f_{n+1}^2}.$$

Por outro lado, a k-ésima soma parcial da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{n-1}.f_{n+2}}{f_n^2.f_{n+1}^2}$ é:

$$s_k=a_1+a_2+\ldots+a_k,\text{ onde } a_n=\frac{f_{n-1}.f_{n+2}}{f_n^2.f_{n+1}^2},\text{ para } n=1,2,\ldots,k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s_k = & \; a_1 + a_2 + \ldots + a_k \\ & \frac{f_0.f_3}{f_1^2.f_2^2} + \frac{f_1.f_4}{f_2^2.f_3^2} + \ldots + \frac{f_{k-1}.f_{k+2}}{f_k^2.f_{k+1}^2} \\ = & \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right) + \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{f_k^2} - \frac{1}{f_{k+1}^2}\right) \\ = & \frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_{k+1}^2} \\ = & 1 - \frac{1}{f_{k+1}^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}.f_{n+2}}{f_n^2.f_{n+1}^2} = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{f_{k+1}^2}\right) = 1,$$

pois $\lim\limits_{k\to\infty} f_{k+1}^2 = +\infty$, o que revela que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{f_{k+1}^2} = 0$. Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}.f_{n+2}}{f_n^2.f_{n+1}^2} = 1$.

18. Sorteando aleatoriamente um elemento n do conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, 1.000.000\}$, a probabilidade de que o primeiro dígito de 2^n seja 1 é igual a p. Podemos afirmar que:

 ◯ (a) $p < \frac{3}{10}$
 ◯ (b) $p \geq \frac{3}{10}$
 ◯ (c) $p < \frac{3}{19}$
 ◯ (d) $p = \frac{3}{19}$
 ◯ (e) $p = \frac{1}{10}$

Solução ANULADA - Havia um erro no enunciado (Todos os alunos ganham o ponto dessa questão).

.

19. Sendo i a unidade imaginária do corpo dos números complexos, qual dos conjuntos abaixo representa valores do número complexo i^i ?

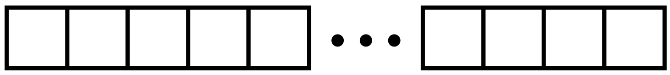
 ◯ (a) $\{e^{-(\frac{\pi}{2}\cdot k)} | k \in \mathbb{Z}\}$
 ◯ (b) $\{e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} | k \in \mathbb{Z}\}$
 ◯ (c) $\{e^{-(\pi+2k\pi)} | k \in \mathbb{Z}\}$
 ◯ (d) $\{e^{-(k\pi)} | k \in \mathbb{Z}\}$
 ◯ (e) $\{e^{-(\pi+k\frac{\pi}{2})} | k \in \mathbb{Z}\}$

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Sabemos que $i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$i^i = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^i = e^{i^2.\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

20. Na figura a seguir temos n quadrados desenhados numa faixa reta.



A quantidade de maneiras de pintar os n quadrados da faixa utilizando as cores preto e vermelho sem que dois quadrados vizinhos sejam pretos é igual a:

- ○ (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$
- ○ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$
- ○ (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$
- ○ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\right]$
- ○ (e) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+4}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+4}\right]$

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Sejam (P) preto e (V) vermelho e x_n o número de maneiras distintas de pintarmos a faixa com n quadrados sem que haja dois quadrados pretos vizinhos.

- No caso em que $n = 1$, há 2 maneiras de fazer a pintura: P ou V.
- No caso em que $n = 2$ há 3 maneiras de fazer a pintura: PV, VP ou VV.
- No caso em que $n = 3$ há 5 maneiras de fazer a pintura: PVV, VPV, VVP, VVV ou PVP.
- Os casos anteriores revelam que $x_1 = 2, x_2 = 3$ e $x_3 = 5$. Note que esses três primeiros valores são valores da famosa sequência de Fibonacci, $(f_n)_{n\geq 0}$; $f_0 = 0, f_1 = 1$ e $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para todo inteiro $n \geq 0$. De acorco com a questão 17,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].$$

  Assim, $x_1 = 2 = f_3, x_2 = 3 = f_4, x_3 = 5 = f_5$, o que sugere que $x_n = f_{n+2}$. De fato, se considerarmos uma faixa com n quadrados, temos duas opções para pintarmos o primeiro quadrado; preto ou vermelho. Se o primeiro quadrado for pintado de preto, o segundo quadrado deve necessariamente ser pintado de vermelho, restando $n-2$ quadrados para serem pintados sem que dois quadrados vizinhos fiquem com a mesma cor, o que pode ser feito de x_{n-2} modos distintos. No caso em que o primeiro quadrado seja pintado de vermelho, restam $n-1$ quadrados para serem pintados, o que pode ser feito de x_{n-1} modos distintos. Diante do exposto, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ para todo $n \geq 3$, o que revela que a sequência (x_n) é "Tipo Fibonacci", como $x_n = f_{n+2}$. Assim,

$$x_n = f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$