30ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO RIO GRANDE DO NORTE 2019- PRIMEIRA FASE.
PROVA DO NÍVEL I - 6º e 7º ANOS - ENSINO FUNDAMENTAL.

Para cada questão, assinale **uma** alternativa como a resposta correta.

NOME DO(A) ESTUDANTE: ______________________________

GABARITO OFICIAL

1. Dentre as alternativas abaixo, assinale o número que é igual a 2^{100}.

◯ (a) $4^5 \times 2^{10}$
◯ (b) metade de 2^{101}
◯ (c) $16^5 \times 2^5$
◯ (d) $(2^3)^{97}$
◯ (e) $2^2 + 2^{98}$

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Basta perceber que:

$$\frac{2^{101}}{2} = \frac{2^{101}}{2^1} = 2^{101}.2^{-1} = 2^{101-1} = 2^{100}.$$

2. O valor da soma

$$S = 99 \times 2019 + 99 \times 2018 + 99 \times 2000 + 99 \times 1981 + 99 \times 1982$$

é igual a:

◯ (a) 900.000
◯ (b) 990.000
◯ (c) 999.000
◯ (d) 999.900
◯ (e) 999.990

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} S = &\ 99\times 2019+99\times 2018+99\times 2000+99\times 1981+99\times 1982 \\ = &\ 99\,(2019+2018+2000+991981+991982) \\ = &\ 99\times[(2019+1981)+2000+(2018+1982)] \\ = &\ 99\times(4000+2000+4000) \\ = &\ 99\times 10.000 \\ = &\ 990.000. \end{aligned}$$

3. O dígito que ocupa o 2019 lugar na expansão decimal da fração $\frac{3}{7}$ é:
   - (a) 4
   - (b) 2
   - (c) 8
   - (d) 5
   - (e) 7

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Fazendo a divisão de 3 por 7, segue que $\frac{3}{7}=0,\overline{428571}$. Ou seja, o número $\frac{3}{7}$ é uma dízima periódica cujo período é 428571, que possui 6 algarismos. Como $2019=336\times 6+3$, segue que nos primeiros 2019 algarismos da expansão decimal de $\frac{3}{7}$ ocorre o 336 vezes bloco 428571 e ainda escrevemos mais 3 algarismos, isto é, 428, o que revela que o 2019^{o} algarismo é o algarismo 8.

4. Algumas parcelas devem ser removidas da expressão

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

para que a soma das parcelas restantes seja igual a 1. A soma das parcelas que devem ser removidas é:
   - (a) $\frac{9}{40}$
   - (b) $\frac{2}{3}$
   - (c) $\frac{4}{15}$
   - (d) $\frac{5}{24}$
   - (e) $\frac{3}{8}$

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Ora, como

$$\begin{aligned} S = &\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12} \\ = &\ \frac{60+30+20+15+12+10}{120} \end{aligned}$$

Note que $60+30+20+10=120$. Assim se retirarmos as frações correspondentes as parcelas 15 e 12, que são respectivamente $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$, segue que a soma remanescente é $\frac{120}{120}=1$. Portanto para para que parcelas restantes seja igual a 1 é preciso retirar as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$ cuja soma é $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{9}{40}$.

5. O número inteiro $10!$ (leia-se: dez fatorial) é definido por

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

A quantidade de divisores positivos do número $10!$ é igua a:

- ◯ (a) 10
- ◯ (b) 120
- ◯ (c) 270
- ◯ (d) 360
- ◯ (e) 380

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Fatorizando cada um dos fatores de 1 a 10, segue que $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$. Portanto, a quantidade de divisores positivos do número $10!$ é igua a $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 270$.

6. Todos os dias Nice dá o mesmo número de voltas na pista de corrida do seu novo condomínio. Após completar um certo número de voltas, ela completou 20% do número total de voltas, e após dar mais uma volta ela completa 25% do total de voltas. A quantidade de voltas que Nice dá diariamente na pista é:

- ◯ (a) 20
- ◯ (b) 30
- ◯ (c) 40
- ◯ (d) 50
- ◯ (e) 60

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Seja n o número de voltas que Nice dá diariamente. Sendo t o número de voltas que corresponde a 20% do número total de voltas, segue que $t = 0,20.n$ e $t+1 = 0,25.n$. Assim, $0,20n + 1 = 0,25n$, o que revela que $n = 20$.

7. Natália queria montar o mesmo cubo que Diana havia montado (veja na Figura 1 abaixo), mas ao tentar, acabaram-se os cubos unitários e ela só conseguiu fazer a parte do cubo mostrado na Figura 2.

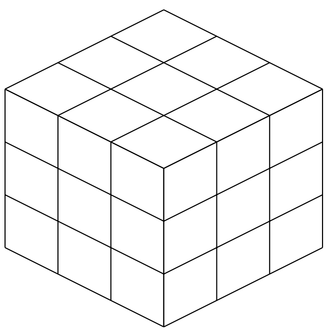


Figura 1

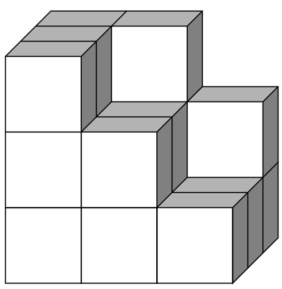


Figura 2

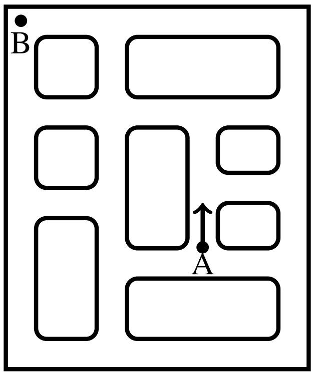
A quantidade de cubos unitários que faltam na Figura 2 para formar a Figura 1 é:

- ◯ (a) 5
- ◯ (b) 6
- ◯ (c) 7
- ◯ (d) 8
- ◯ (e) 9

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

É fácil ver que na Figura 2 faltam 7 cubos unitários para formar o cubo da Figura 1.

8. Nicolas está aprendendo a dirigir pelas ruas de seu bairro, veja o mapa na Figura a seguir. O carro que ele dirige apresenta um defeito: não pode dobrar à direita.

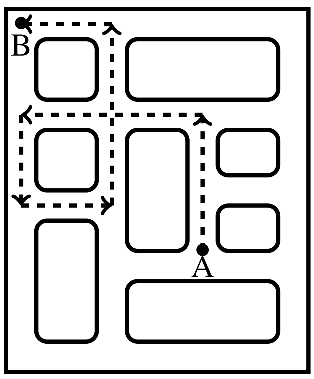


Iniciando no ponto A e no sentido da seta, o menor número de giros à esquerda que ele deve fazer para ir do ponto A ao ponto B é:

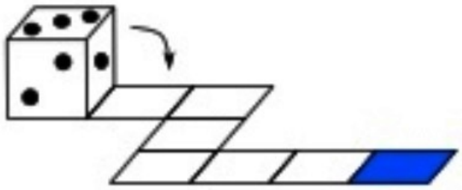
- ◯ (a) 3
- ◯ (b) 5
- ◯ (c) 6
- ◯ (d) 8
- ◯ (e) 10

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Veja o percurso mínimo que Nicolas pode fazer:



9. A soma dos pontos nas faces opostas de um dado comum é sempre 7. O dado mostrado na Figura a seguir gira sobre o caminho composto de quadrados até chegar ao quadrado sombreado.



No início, a face superior do dado mostra 3 pontos. A quantidade de pontos mostrada na face superior do dado na posição final do caminho é:

- ◯ (a) 2
- ◯ (b) 3
- ◯ (c) 4
- ◯ (d) 5
- ◯ (e) 6

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Os números que aparecerão na face superior do dados após os sucessivos movimentos ao longo do caminho composto de quadrados são: 3, 6, 4, 5, 3, 1, 4 e, finalmente 6.

10. Pretende-se escrever em cada casa de um tabuleiro 5×5 ou o número 1 ou o número 0, de modo que em cada sub-tabuleiro 2×2 estejam escritos exatamente 3 números iguais. Na figura a seguir, mostramos um exemplo de como fazer isso. Nesse exemplo, a soma total dos números escritos é 12.

0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

Nas condições do problema, a soma máxima possível do total dos números escritos no tabuleiro 5×5 é igual a:

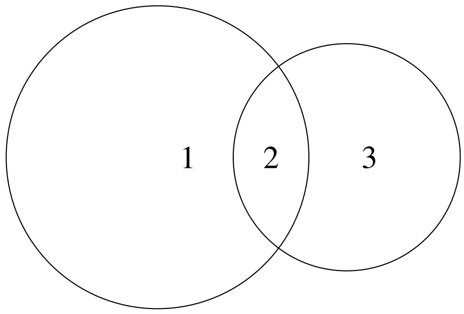
- ◯ (a) 18
- ◯ (b) 19
- ◯ (c) 20
- ◯ (d) 21
- ◯ (e) 22

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Obrigatoriamente, nas casas dos cantos de cada um dos sub-tabuleiros 2×2 deve estar escrito pelo menos um número 0. Isto significa que o total máximo dos números escritos no tabuleiro é menor do que ou igual a 21. Na Figura a seguir mostramos como escrever os números nas 25 casas do tabuleiro de maneira que a soma total seja igual a 21:

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

11. Desenhando dois círculos, Carmela obteve uma figura que consiste de três regiões limitadas, veja Figura a seguir.

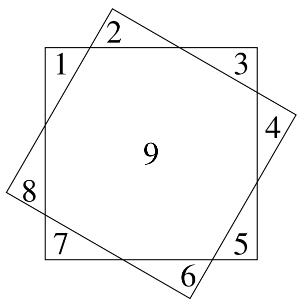


Se Carmela desenhar dois quadrados ela poderá obter um total máximo de regiões limitadas igual a:

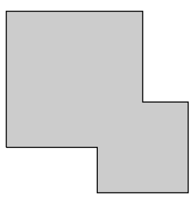
- ◯ (a) 3
- ◯ (b) 5
- ◯ (c) 6
- ◯ (d) 8
- ◯ (e) 9

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Se Carmela desenhar dois quadrados como na Figura a seguir, ela poderá obter 9 regiões limitadas.



12. A Figura a seguir foi formada a partir de dois quadrados, um com lado medindo 5 cm e o outro com lado medindo 4 cm, de modo que um vértice do quadrado maior coincide com o centro do quadrado menor.

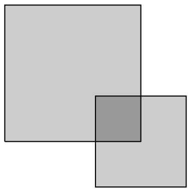


Em cm^2, a área da região sombreada é igual a:

- ◯ (a) 29
- ◯ (b) 36
- ◯ (c) 37
- ◯ (d) 40
- ◯ (e) 41

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

As área dos dois quadrados são $25\ cm^2$ e $16\ cm^2$, respectivamente. A região comum aos dois quadrados é um quadrado de lado medindo 2 cm. Portanto, a área sombreada é numericamente igual a $25+16-4=37$.



13. Beto coleciona selos guardando-os em caixas. Ele possui 26 caixas, e em cada caixa contém 36 selos. Hoje ele viu que algumas caixas estavam quebradas, decidiu esvaziar todas as caixas e retirar as caixas quebradas. Para guardar todos os seus selos nas caixas restantes, ele terá que acrescentar ao número de selos que tinha em cada caixa 2 selos para cada caixa que retirou.
A quantidade de caixas que sobrou é:

- ◯ (a) 6
- ◯ (b) 8
- ◯ (c) 12
- ◯ (d) 18
- ◯ (e) 20

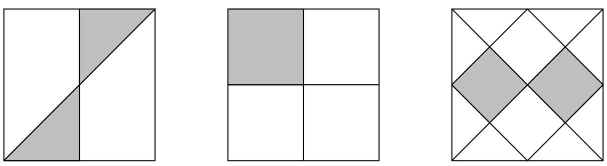
Solução A resposta correta é a alternativa (d).

A quantidade total de selos é igual a $26\cdot 36=936$. Seja n a quantidade de caixas quebradas que ele retirou. Assim, a quantidade de caixas que sobrou é: $26-n$. Dos dados do prblema, temos que:

$$(26-n)\cdot(36+2n)=936\Rightarrow 936+52n-36n-2n^2=936\Rightarrow 2n^2-16n=0\Rightarrow n=0 \text{ ou } n=8$$

Portanto, a quantidade de caixas que sobrou é $26-8=18$.

14. Os três quadrados da figura a seguir são de mesmas dimensões e os segmentos que os intersectam os fazem nos pontos médios dos lados ou em vértices.



(I) (II) (III)

Sobre as áreas sombreadas das três figuras, $S(I)$, $S(II)$, $S(III)$, respectivamente, podemos dizer que:

◯ (a) $S(I) \neq S(II)$

◯ (b) $S(I) \neq S(III)$

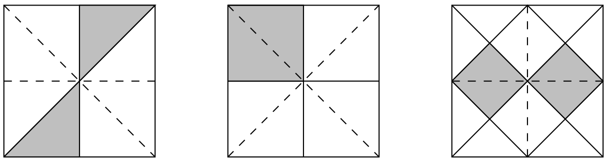
◯ (c) $S(II) \neq S(III)$

◯ (d) $S(I) + S(II) = S(III)$

◯ (e) $S(I) = S(II) = S(III)$

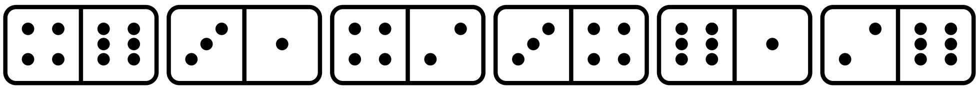
Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Para ver isso, basta dividir a região limitada por cada quadrado 8 partes iguais:



(I) (II) (III)

15. A Figura a seguir mostra 6 peças de dominó. Cada peça é formada por dois quadrados e em cada quadrado há um certo número de pontos. Pretende-se reorganizar as peças de tal forma que elas continuem na mesma linha, mas que para cada par de peças que permanecem juntas, o número de pontos dos quadrados vizinhos seja o mesmo nas duas peças. Existem dois tipos de movimentos permitidos, um deles é girar qualquer peça, e o outro é a trocar de lugar de duas peças.



A menor quantidade de movimentos a ser feito para dispor as peças como descrito acima é:

◯ (a) 1

◯ (b) 2

◯ (c) 3

◯ (d) 4

◯ (e) 5

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Observe que os únicos pontos que aparecem uma quantidade ímpar de vezes são 4 e 6, o que implica que eles devem ficar situados nas extremidades da cadeia de dominós. Logo, as peças que possuem 1 ponto deve ficar juntas. Mas, para fazer isso requer pelo menos dois movimentos, que não são suficientes para arrumar a cadeia de dominós como queremos. Assim, precisamos de pelo menos três movimentos para arrmar a cadeia de dominós.
É possível estabelecer uma sequência de três movimentos trocando primeiramente a posição da peça que tem 4 e 2 com a peça que tem 6 e 1. Em seguida, trocamos de posição a peça que possui 3 e 1 pontos com a peça que possui 6 e 1. Finalmente, invertemos a peça que possui 3 e 1 pontos.
A Figura a seguir mostra como ficam as peças de dominó depois desses três movimentos.

16. Num tabuleiro 27×27, Carla deve pintar de cinza algumas das casas do tabuleiro, de maneira tal que fique pelo menos uma casa sem pintar e a pintura deve satisfazer as duas condições seguintes:

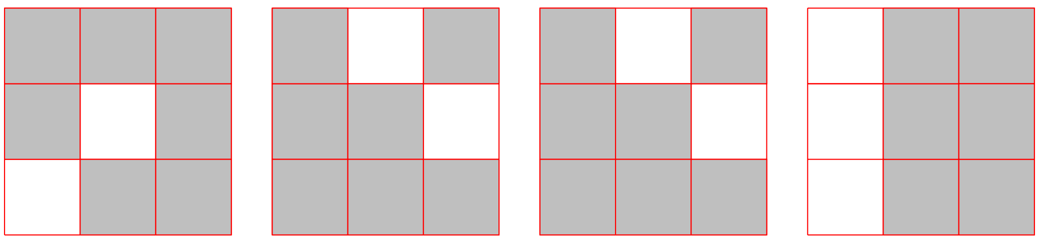
- Em cada sub-tabuleiro 2×2 a quantidade de casas pintadas de cinza deve ser par;
- Em cada sub-tabuleiro 3×3 a quantidade de casas pintadas de cinza deve ser ímpar.

A quantidade máxima de casas que Carla pode pintar é:

◯ (a) 405
◯ (b) 400
◯ (c) 205
◯ (d) 200
◯ (e) 3

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Inicialmente, observe que: em cada sub-tableiro 3×3 não existem mais do que 5 casas pintadas de cinza. De fato, se houvessem 7 casas pintadas (por hipóteses a quantidade de casas pintadas de cinza num sub-tabuleiro 3×3 deve ser ímpar), é impossível que em cada sub-tabuleiro 2×2 tenhamos uma quantidade par de casas pintadas, veja os exemplos a seguir:



Desse modo, divide-se o tabuleiro dado em 81 sub-tabuleiros 3×3,e como no máximo 5 casas podem ser pintadas, o númro máximo de casas pintadas será $5 \cdot 81 = 405$.

17. Os primos Nath, Mel, Lara, Matias e Murilo estão sentados em volta de uma mesa redonda. Eles contam em voz alta os números naturais a partir de 1. Primeiro fala Nath, depois Mel, Lara, Matias e Murilo. Quando uma pessoa fala um número múltiplo de 7 ou um número que contém o dígito 7 (por exemplo, 37) essa pessoa deixa a mesa.
A última pessoa que deixa a mesa é:

◯ (a) Nath
◯ (b) Mel
◯ (c) Lara
◯ (d) Matias
◯ (e) Murilo

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Os números falados são: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$. Os números que eliminam da mesa uma pessoa são: $7, 14, 17, 21, 27, 28, 35, 37, \ldots$. Na tabela a seguir, colocamos em negrito o número que elimina da mesa a pessoa que o fala, o que fica claro que a última pessoa a sair é Nath:

Nath	1	6	11	15	18	20
Mel	2	**7**				
Lara	3	8	12	16	19	**21**
Matias	4	9	13	**17**		
Murilo	5	10	**14**			

18. O maior número natural de quatro digitos que é um divisor de 111777 é:
    - (a) 1961
    - (b) 1577
    - (c) 1771
    - (d) 5883
    - (e) 7777

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

A decomposição do número 111777 em fatores primos é igual a

$$111777 = 3 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 53$$

Portanto, segue que o maior número de quatro algarismos que divide o número dado é $3 \cdot 37 \cdot 53 = 5883$.

19. Murilo que colocar cerâmicas no assoalho retangular de seu escritório, que mede 12 m por 16 m. Ele planeja colocar nas partes mais próximas das paredes (o bordo da sala) cerâmicas que medem 1 m por 1 m e na parte central do assoalho cerâmicas de tamanho 2 m por 2 m.
A quantidade de cerâmicas que Murilo vai utilizar é:
    - (a) 48
    - (b) 87
    - (c) 91
    - (d) 96
    - (e) 120

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

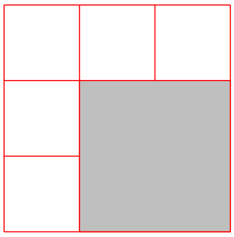
Nas bordas da sala existem $2 \times 16 + 2 \times 10 = 52$ peças 1×1 e na parte central existem $5 \times 7 = 35$ peças 2×2. Portanto o número total de peças é $52 + 35 = 87$ peças.

20. Um quadrado de área 144 cm^2 pode ser decomposto em seis quadrados de lados inteiros não todos iguais. Qual a soma dos perímeros de todos os seis quadrados?
    - (a) 36 cm

- ◯ (b) 84 cm
- ◯ (c) 96 cm
- ◯ (d) 112 cm
- ◯ (e) 164 cm

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Você pode dividir o quadrado original em 6 da seguinte forma:



Cada um dos quadrados menores tem lado 4 (perímetro 16) e o quadrado em cinza tem lado 8 (perímetro 32). Portanto a soma dos perímetros dos 6 quadados é $5 \times 16 + 32 = 112$.