30ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO RIO GRANDE DO NORTE 2019- PRIMEIRA FASE.
PROVA DO NÍVEL II - 8º e 9º ANOS - ENSINO FUNDAMENTAL.

Para cada questão, assinale **uma** alternativa como a resposta correta.

NOME DO(A) ESTUDANTE: ____________________

GABARITO OFICIAL

1. Na adição de termos iguais $2019^{2019}+2019^{2019}+2019^{2019}+\ldots+2019^{2019}=2019^{2020}$, escrita de forma simplificada, foram escritos muitos sinais $(+)$. O total de sinais $(+)$ escritos é:
   - (a) 2019
   - (b) 2018
   - (c) 2019^2
   - (d) 2018^2
   - (e) 2021^{2019}

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

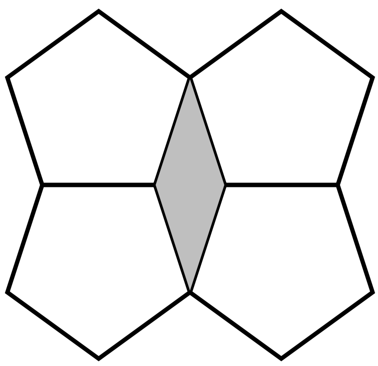
Basta perceber que:

$$\underbrace{2019^{2019}+2019^{2019}+2019^{2019}+\ldots+2019^{2019}}_{n \text{ parcelas}}=2019^{2020} \Rightarrow$$

$$n\cdot 2019^{2019}=2019^{2020} \Rightarrow n=\frac{2019^{2020}}{2019^{2019}}=2019^{2020-2019}=2019^1=2019.$$

Ora, como no primeiro membro são 2019 parcelas, segue que existem 2018 sinais $+$.

2. Quatro pentágonos regulares estão dispostos como na Figura a seguir.



A medida do maior ângulo do quadrilátero sombreado é:

- ◯ (a) 36°
- ◯ (b) 44°
- ◯ (c) 72°
- ◯ (d) 108°
- ◯ (e) 144°

A resposta correta é a alternativa (e).
O ângulo central do pentágono regular mede $\frac{360}{5} = 72^\circ$. Unindo o centro de um pentágono regular com os vértices formamos triângulos isósceles congruentes, que possuem os ângulos das base com a mesma medida.
Seja u a medida de cada ângulo da base de cada triângulo isóceles. Segue que, cada ângulo interior do pentágono regular mede $2u = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Logo, os ângulos interiores do pentágono medem 108°.
Agora, olhemos para o quadrilátero sombreado, é fácil ver que o quadrilátero sombreado possui os ângulos opostos com a mesma medida e que existem dois tipos de ângulos interiores no quadrilátero sombreado.
Um tipo é aquele que junto com dois ângulos do pentágono regular perfazem um giro de 360°. Chamando a medida desse ângulo do quadrilátero de θ, temos: $108^\circ + 108^\circ + \theta = 360^\circ$, o que implica $\theta = 144^\circ$.
O outro tipo de ângulo do quadrilátero sombreado é aquele que junto com três ângulos de mesma medida que a de qualquer ângulo interno do pentágono regular perfazem um giro de 360°. Chamando a medidad desse ângulo do quadrilátero de β, temos que: $108^\circ + 108^\circ + 108^\circ + \beta = 360^\circ$, o que implica $\beta = 36^\circ$.
Assim, as medidas dos ângulos do quadrilátero sombreado são: 144°, 144°, 36°, 36°. Portanto, a resposta é 144°.

3. Cinco equipes disputam um torneio de futebol, onde cada uma enfrenta outra exatamente uma vez. Em cada partida, o vencedor ganha 3 pontos, o perdedor 0, e em caso de empate cada equipe ganha 1 ponto. Se ao final do torneio a pontuação de todas as equipes são distintas, a menor pontuação possível que pode obter o campeão do torneio é:

- ◯ (a) 4
- ◯ (b) 5
- ◯ (c) 6
- ◯ (d) 7
- ◯ (e) 8

Solução

A resposta correta é a alternativa (d).
Vamos chamar as equipes de E_1, E_2, E_3, E_4, E_5. Para calcular a quantidade total de partidas do torneio, basta contá-las da seguinte maneira:

- A equipe E_1 enfrenta 4 equipes;
- Uma vez contadas as partidas disputadas pela equipe E_1, a quantidade de partidas disputadas pela equipe E_2 é igual a $4-1=3$, porque a partida entre E_1 e E_2 já foi contada antes;
- De módo análogo, a quantidade de partidas disputadas pela equipe E_3 é igual a $4-1-1=2$;

- A quantidade de partidas disputadas pela equipe $E_4 = 4-1-1-1 = 1$;
- Todas as partidas disputadas pela equipe E_5 já foram contadas nos itens acima.

Assim, a quantidade total de partidas disputadas pelas cinco equipes é igual a: $4+3+2+1 = 10$. Agora, observe que em cada partida se reparte entre as equipes: 2 pontos em caso de empate (1 ponto para cada equipe) ou 3 pontos (no caso em que haja vencedor). Isto significa que a soma das pontuações de todas as equipes é no mínimo $2 \cdot 10 = 20$, onde 10 é o número de partidas do torneio. Esse número só corre quando todas as equipes empatam em todas as partidas.
Se a pontuação do campeão do torneio fosse menor do que ou igual a 6, e como, por hipótese, as pontuações das 5 equipes são distintas, a soma de todas seria no máximo:

$$6+5+4+3+2 = 20$$

Ora, nesse caso, todas as partidas teriam terminadas empatadas e todos teriam 4 pontos. Contradição. Portanto, a pontuação do campeão é no mínmo 7. Um exemplo de torneio no qual o campeão obteve exatamente 7 pontos é o seguinte:

Equipe	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	PONTUAÇÃO
E_1	•	0	3	3	1	7
E_2	3	•	1	1	1	6
E_3	0	1	•	3	1	5
E_4	0	1	0	•	3	4
E_5	1	1	1	0	•	3

4. Antonio queria comprar um eletrodoméstico. Na loja A o eletrodoméstico custa $R\$1200,00$ e é oferecido um desconto de 10%. Na loja B o mesmo eletrodoméstico custa um pouco mais, mas ofereceram um desconto de 20%. Antonio percebeu que o preço do eletrodoméstico em ambas as lojas era o mesmo. O eletrodoméstico na loja B custava inicialmente o valor de:

   ○ (a) 1300

   ○ (b) 1350

   ○ (c) 1400

   ○ (d) 1450

   ○ (e) 1500

   Solução A resposta correta é a alternativa (b).
   Na loja A, o eletrodoméstico custava: $1200 \cdot 90\% = 1080$.
   Seja x o preço do eletrodoméstico na loja B. Logo, o preço final do eletrodoméstico nessa loja é igual a: $x \cdot 80\% = \frac{8x}{10}$.
   Por outro lado, temos que: $\frac{8x}{10} = 1080 \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 1080}{8} = 1350$.

5. Seja n o número de trabalhadores que podem fazer uma obra em $\frac{3n}{4}$ dias, trabalhando $\frac{n}{3}$ horas por dia. Se dobrássemos a quantidade de trabalhadores, terminariam a obra em 72 horas de trabalho. O valor de n é:

   ○ (a) 12

   ○ (b) 16

   ○ (c) 18

   ○ (d) 24

○ (e) 32

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Observe que, n trabalhadores tendo $\frac{3n}{4}$ dias de trabalho, trabalhando $\frac{n}{3}$ horas diariamente, equivalem a um total de horas trabalhadas igual a:

$$\frac{3n}{4}\cdot\frac{n}{3}=\frac{n^2}{4}.$$

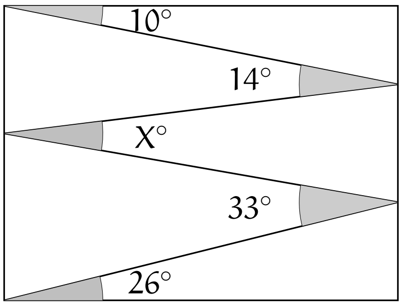
Por outro lado, $2n$ trabalhadores podem fazer o mesmo trabalho em 72 horas de trabalho. Assim, temos:

Horas de Trabalho	Número de Trabalhadores
$\frac{n^2}{4}$	n
72	$2n$

Como o número de trabalhadores e as horas de trabalho são inversamente proporcionais, segue que:

$$n\cdot\frac{n^2}{4}=2n\cdot 72 \Rightarrow n^2=4\cdot 2\cdot 72=576 \Rightarrow n=24$$

6. Desenham-se vários segmentos de reta na região limitada por um retângulo, veja Figura a seguir.



Com isso, formamos cinco ângulos de medidas $10°$, $14°$, $X°$, $33°$ e $26°$. O valor X é:

○ (a) $11°$
○ (b) $12°$
○ (c) $16°$
○ (d) $17°$
○ (e) $33°$

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Como o ângulo DAB é reto, o ângulo MAE mede $90°-10°=80°$. Olhando para o triângulo AME, temos que o ângulo AME mede $180°-14°-80°=86°$. Como o ângulo ADC é reto, o ângulo MDF mede $90°-26°=64°$. Agora, no triângulo MFD temos que o ângulo DMF mede $180°-33°-64°=83°$. Logo, o ângulo EMF mede $180°-86°-83°=11°$, que é a resposta correta.

7. Todas as raízes da equação quadrática

$$x^2-63x+k=0$$

são números primos. A quantidade de valores possíveis para k é:

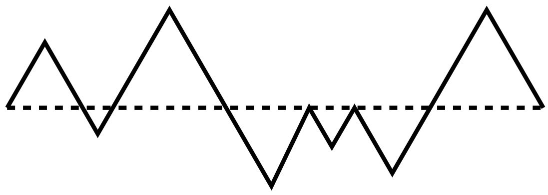
- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

Solução A resposta correta é a alternativa (b).
Sejam m e n as raízes da equação quadrática dada. Temos que:

$$m+n=63 \quad e \quad m \cdot n = k,$$

com m e n números primos. Agora, observe que, como 63 é um número ímpar, temos que m é par e n é ímpar (ou vice-versa). Mas, o único primo que é par é o número 2. Logo, $m=2$ e $n=61$, o que implica $k=2 \cdot 61=122$. Portanto, existe uma única possibilidade para k.

8. Na Figura a seguir, a linha preta e a linha pontuada formam sete triângulos equiláteros.

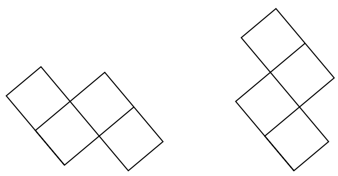


O comprimento da linha pontuada é 20 cm. O comprimento da linha preta é:

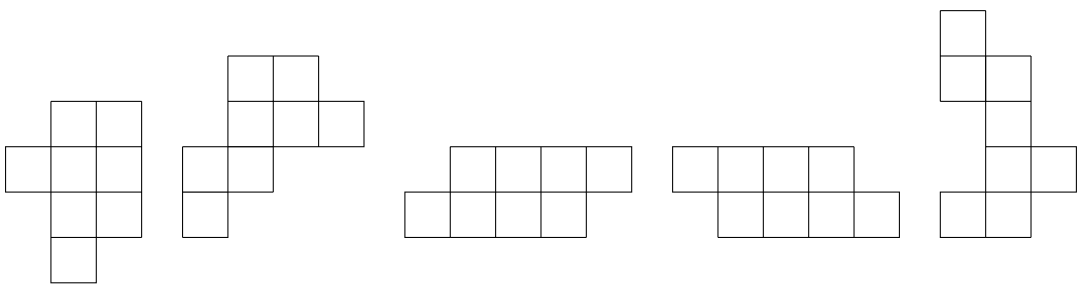
- (a) 25cm
- (b) 30cm
- (c) 35cm
- (d) 40cm
- (e) 45cm

Solução A resposta correta é a alternativa (d).
Como os triângulos são equiláteros, o comprimento da linha pontuada é o dobro do comprimento da linha pontuada. Portanto, a resposta é: $2 \cdot 20=40$.

9. Paulinho tem duas peças feitas de cartolina e mostradas a seguir:



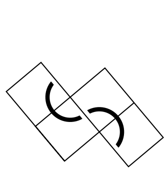
Das figuras seguintes, a que Paulinho pode fazer usando as duas peças é a opção:



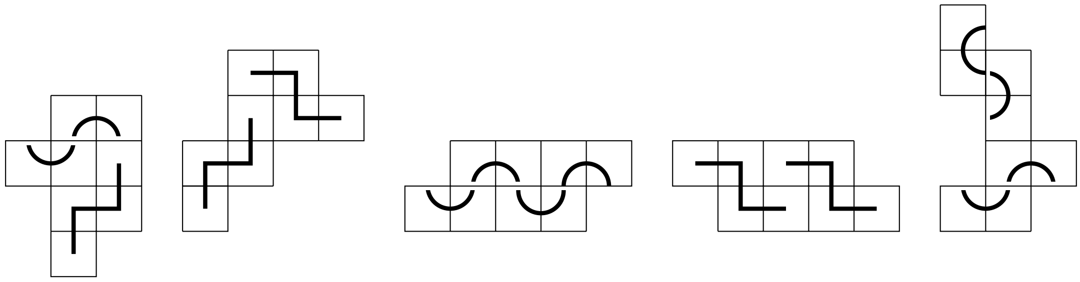
(a) (b) (c) (d) (e)

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

A coisa importante neste problema é notar a orientação das peças com o qual ele vai formar a figura. Na peça à esquerda, a orientação é como a letra **S**, enquanto à direita a orientação é como a da letra **Z**.



Para cada uma das opções apresentada no problema, mostramos a orientação que as peças tomam.



(a) (b) (c) (d) (e)

Observe que na opção (a) é a única em que os dois, **S** e **Z**, aparecem, enquanto nas opções (b) e (d) aparece duas vezes **Z**, e nas opções (c) e (e) aparece duas vezes **S**. Portanto, a resposta é a opção (a).

10. Uma caixa contém 28 bolas vermelhas, 20 bolas verdes, 19 bolas amarelas, 13 bolas azuis, 11 bolas brancas e 9 bolas pretas. O número mínimo de bolas que devem ser retiradas da caixa, sem reposição, para garantir que pelo menos 15 bolas de uma mesma única cor sejam retiradas é:

    ◯ (a) 75
    ◯ (b) 76
    ◯ (c) 79
    ◯ (d) 84
    ◯ (e) 91

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Retirando o número máximo de bolas de modo que tenhamos uma quantidade menor do 15 bolas de cada cor, poderíamos ter retirado 14 bolas vermelhas, 14 bolas verdes, 14 bolas amarelas, 13 bolas azuis, 11 bolas brancas e 9 bolas pretas, num total de $14+14+14+14+13+11+9=75$ bolas. Retirando mais uma bola conseguiremos um total de 15 bolas de mesma cor (ou da cor vermelha ou verde ou amarela). Portanto, a resposta é: $75+1=76$.

11. A cada 3 minutos um ônibus sai do aeroporto e leva 60 minutos para chegar ao centro da cidade. Um carro sai do aeroporto ao mesmo tempo que um dos ônibus, usa a mesma rota que os ônibus, e leva 35 minutos para chegar ao centro da cidade. A quantidade de ônibus que o carro ultrapassa em seu caminho para o centro da cidade, excluindo o ônibus que saiu ao mesmo tempo, é igual a:

    ◯ (a) 8

- (b) 10
- (c) 11
- (d) 12
- (e) 13

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

O carro ultrapassa todos os ônibus que estão faltando mais de 35 minutos para chegar ao centro da cidade, ou seja, aqueles que estão a $60-35=25$ ou menos minutos a caminho. Como $8<\frac{25}{3}<9,$ o número de ônibus que o carro ultrapassará será igual a 8.

12. Numa prisão, 2019 detentos são organizados em uma fila indiana (um atrás do outro) e é colocado em cada detento um chapéu branco ou preto de modo que cada um vê a cor dos chapéus dos prisioneiros que estão na frente na fila (mas, não vê seu chapéu ou aqueles das pessoas que estão atrás na fila). Pergunta-se para todos os presos, na ordem do último para o primeiro da fila, qual a cor do seu chapéu. Quem acerta será libertado e quem erra continuará preso. Se você pudesse estabelecer uma estratégia prévia entre os prisioneiros, o número máximo de detentos que você poderia garantir a liberdade é:
    - (a) 2019
    - (b) 2018
    - (c) 1009
    - (d) 100
    - (e) 1

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Como o último da fila não pode saber qual é a cor de seu chapéu, fica claro que não existe uma estratégia capaz de dar liberdade a todos. No entanto, você pode salvar os outros $2018,$ desde que você estabeleça entre os detentos a estratégia que explicamos a seguir.
Associamos a cor preta ao númeo 1 e à cor branca o número -1.
O último da fila multiplica todos os números associados aos chapéus que estão à frente dele e diz a cor do seu chapéu como a correspondente ao produto (pode até acertar se ele tem sorte, mas não há nenhuma garantia de que pode conseguir). No entanto, o que está na frente, para encontrar o número corresponde a cor do chapéu dele, divide o produto dos números associados aos 2017 chapéus que estão à sua frente pelo número que seu antecessor falou desde que ela tenha errado, caso contrário divide pelo outro número. Da mesma forma, os prisioneiros seguintes, para encontrar o número correspondente à cor do seu chapéu, multiplica os números correspondentes aos chapéus que estão à sua frente e o divide pelo número associado a cor do chapéu de seu antecessor. Desta forma, assegura que todos são salvos exceto possivelmente o última da fila.
Nota. O mesmo raciocínio se aplica para uma fila com n prisioneiros e, como isso, garante que pode-se salvar $n-1$ prisioneiros.

13. A soma
$$S=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+4+\ldots+51}$$
é igual a:
    - (a) $\frac{25}{26}$
    - (b) $\frac{51}{52}$
    - (c) $\frac{23}{53}$

(d) $\frac{1}{23}$

(e) $\frac{23}{52}$

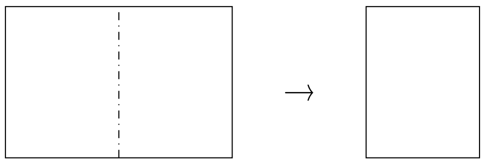
Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Sabemos que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Portanto,

$$S = \sum_{k=2}^{51} \frac{1}{1+2+3\cdots+n} = \sum_{k=2}^{51} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{k=2}^{51} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{k=2}^{51}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow$$

$$S = 2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{52}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{52}\right) = \frac{25}{26}.$$

14. Uma folha de papel retangular foi “dobrada ao meio” como ilustra a figura a seguir:



Se o retângulo obtido é semelhante ao retângulo original, podemos afirmar que a razão entre as medidas dos lados do retângulo menor é igual a:

(a) 2

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(e) $\sqrt{2}$

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Imagine que o retângulo original tem base $2a$ e altura b. Após a dobra, o novo retângulo tem base a e altura b. Ora, como esses retêngulos são, pelo enunciado, semelhantes, segue que $\frac{2a}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\sqrt{2}$. Portanto a razão entre as medidas dos lados do retângulo menor é $\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

15. Sejam a e b as raízes reais da equação

$$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0,$$

onde k é um número real. O máximo valor possível para a^2+b^2 é:

(a) $\frac{13}{2}$

(b) 18

(c) $\frac{2}{9}$

(d) 21

(e) $\frac{48}{7}$

Solução A resposta correta é a alternativa (a).
Como a e b são as raízes da equação $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$, segue que:

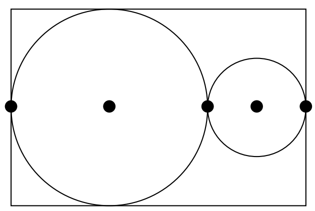
$$a+b=k-2 \ \text{ e } \ a.b=k^2+3k+5.$$

Assim,

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-2k^2-10k+6,$$

que é uma função quadrática em k. Essa função assume valor máximo em $k=-\frac{(-10)}{4}=-2,5$. Portanto o valor máximo de $a^2+b^2=-2.2,5^2-10.(-2,5)-6=\frac{13}{2}$.

16. Um círculo de área 40 é tangente a um círculo de área 10. Seja R um retângulo que contém os dois círculos, como ilustra a figura a seguir.



A medida da área de R é $\frac{n}{\pi}$. O valor de n é:

- ◯ (a) 240
- ◯ (b) 120
- ◯ (c) 81
- ◯ (d) 100
- ◯ (e) 156

Solução A resposta correta é a alternativa (a).
Sejam x e y as medidas dos raios dos círculos maior e menor, respectivamente. Nesse caso a base e a altura do retângulo medem $2x+2y$ e $2y$, respectivamente. Ora, como o círculo maior tem área 40 e o menor tem área 10, segue que

$$\pi y^2=40 \ \text{ e } \ \pi x^2=10 \Rightarrow y^2=\frac{40}{\pi} \ \text{ e } x^2=\frac{10}{\pi}.$$

Diante do exposto, segue que a medida R da área do retângulo é

$$R=(2y+2x)\cdot 2y=4y^2+4xy=4\frac{40}{\pi}+4\sqrt{\frac{40}{\pi}}\sqrt{\frac{10}{\pi}}=\frac{240}{\pi}.$$

Ora, como por hipótese, $R=\frac{\pi}{n}$, segue $\frac{n}{\pi}=\frac{240}{\pi}\Rightarrow n=240$.

17. O lago Donald é invadido por 1000 patos com penas vermelhas ou azuis e as cabeças vermelhas ou azuis. Se 538 dos patos possuem as penas vermelhas, 318 patos possuem cabeça azuis e 250 patos posuem ambas cabeça e penas azuis, a quantidade de patos que possuem cabeça e penas vermelhas é igual a:

- ◯ (a) 68
- ◯ (b) 250

- ◯ (c) 606
- ◯ (d) 470
- ◯ (e) 998

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Como 318 patos têm cabeças azuis e 250 patos têm ambas as cabeças e as penas azuis, existem $318-250=68$ patos com cabeças vermelhas e penas azuis. Os 538 patos com penas vermelhas incluem patos com ambas as cabeças vermelhas e azuis, por isso, se removemos os 68 patos com as cabeças vermelhas e as penas azuis, restam $538-68=470$ patos com ambos cabeças e penas vermelhas.

18. Um garoto só possui dois tipos de livros: livros de quadrinhos e livros sobre a natureza. Sabe-se que $\frac{1}{3}$ de seus livros são de quadrinhos. Depois de ir a uma livraria, ele comprou mais 20 livros de quadrinhos, de modo que agora $\frac{4}{7}$ de seus livros são livros de quadrinhos. A quantidade de livros que o garoto tinha inicialmente era:

- ◯ (a) 12
- ◯ (b) 24
- ◯ (c) 36
- ◯ (d) 48
- ◯ (e) 60

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Seja q a quantidade de livros de quadrinho que o garoto tinha inicialmente e n a quantidade inical de livros sobre a natureza. Pelas hipóteses, temos:

$$\frac{q}{q+n}=\frac{1}{3} \text{ e } \frac{q+20}{q+n+20}=\frac{4}{7}.$$

Simplificando as duas equações acima, obtemos

$$3q=q+n \Rightarrow 2q=n \quad 7q+140=4q+4n+80 \Rightarrow 3q+60=4n.$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos $q=12$ e $n=24$. Portanto, a quantidade de livros que o garoto tinha inicialmente era $12+24=36$.

19. Sabendo-se que para todo número natural n, tem-se:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

O maior número primo que divide o número $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+44\cdot45\cdot46$ é:

- ◯ (a) 17
- ◯ (b) 31
- ◯ (c) 47

○ (d) 61

○ (e) 73

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Podemos escrever a soma $S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + 44\cdot 45\cdot 46$ como

$$S = \sum_{k=2}^{45}(k-1)\cdot k\cdot(k+1) = \sum_{k=2}^{45}(k^3-k) = \sum_{k=2}^{45}k^3 - \sum_{k=2}^{45}k \Rightarrow$$

$$S = (2^3+3^3+\cdots+45^3)-(2+3+\cdots+45) \Rightarrow$$

$$S = (1^3+2^3+3^3+\cdots+45^3-1^3)-(1+2+3+\cdots+45-1) \Rightarrow$$

$$S = (1^3+2^3+3^3+\cdots+45^3)-(1+2+3+\cdots+45) \Rightarrow$$

$$S = \left(\frac{45(45+1)}{2}\right)^2 - \frac{45(1+45)}{2} = \left(\frac{45.46}{2}\right)^2 - \frac{45.46}{2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{45.46}{2}\left(\frac{45.46}{2}-1\right) = 45\cdot 46\cdot 1034 = 45\cdot 46\cdot 11\cdot 47,$$

o que revela que o maior primo que divide S é 47.

20. Dário desenhando um triângulo e medindo seus ângulos internos, com a ajuda de um transferidor, percebeu que estas medidas eram proporcionais aos números 2; 3 e 7. Dário desenhou um triângulo:

○ (a) Isósceles

○ (b) Acutângulo

○ (c) Obtusângulo

○ (d) Retângulo

○ (e) Equilátero

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Chamemos o triângulo desenhado por Dario de ΔABC. Como as medidas dos ângulos internos são proporcionais aos números 2; 3 e 7, temos que :

$$\frac{m(\angle A)}{2} = \frac{m(\angle B)}{3} = \frac{m(\angle C)}{7} = k.,$$

que implica

$$m(\angle A) = 2k,\ \ m(\angle B) = 3k,\ \ m(\angle C) = 7k.$$

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é iguala a $180°$, temos:

$$2k+3k+7k = 180° \ \Rightarrow\ 12k = 180° \ \Rightarrow\ k = 15.$$

Substituindo, temos que:

$$m(\angle A) = 2\cdot 15 = 30°,\ \ m(\angle B) = 3\cdot 15 = 45°,\ \ m(\angle C) = 7\cdot 15 = 105°.$$

Portanto, Dario desenhou um triângulo obtusângulo.