30ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO RIO GRANDE DO NORTE 2019- PRIMEIRA FASE.
PROVA DO NÍVEL III - 1º, 2º e 3º ANOS - ENSINO MÉDIO.

Para cada questão, assinale **uma** alternativa como a resposta correta.

NOME DO(A) ESTUDANTE: ____________________

GABARITO OFICIAL

1. Numa sessão de teatro, as crianças pagaram $R\$8,00$ e os adultos pagaram $R\$25,00$. No final, a bilhetria arrecadou um total de $R\$942,00$ e foram vendidos mais bilhetes de adultos do que de crianças. O total de bilhetes vendidos foi:

   - (a) 37
   - (b) 54
   - (c) 58
   - (d) 61
   - (e) 71

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Suponha que venderam c bilhetes de crianças e a de adultos. Pelas hipóteses, a arrecadação final foi de:

$$8c + 25a = 942 \qquad (*)$$

A equação acima pode ser escrita como:

$$8c + 25a = 8c + 24a + a = 942 \Leftrightarrow 8(c + 3a) + a = 8 \cdot 117 + 6 \Leftrightarrow a = 8 \cdot [(c + 3a) - 117] + 6.$$

Assim, podemos concluir que a é um múltiplo de 8 mais 6. Isto é, $a = 8 \cdot k + 6 \quad (**)$, onde k é um inteiro não negativo. Substituindo $(**)$ em $(*)$, obtemos:

$$8c + 25(8k + 6) = 942 \Leftrightarrow 8c + 200k + 150 = 942 \Leftrightarrow 8c = 942 - 150 - 200k \Leftrightarrow$$

$$8c = 792 - 200k \Leftrightarrow c = 99 - 25k.$$

Como c é um número inteiro não negativo, temos:

$$c = 99 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow 25k \leq 99 \Leftrightarrow k \leq \frac{99}{25} = 3,96.$$

Logo, $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$. Por outro lado, como $a > c$, obtemos uma única solução: $c = 30$ e $a = 24$. Portanto, venderam $c + n = 54$ bilhetes.

2. O máximo divisor comum dos números

$$3^3-3,\ 5^5-5,\ 7^7-7,\dots,\ 2019^{2019}-2019$$

é igual a:

- ◯ (a) 3
- ◯ (b) 9
- ◯ (c) 24
- ◯ (d) 26
- ◯ (e) 48

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Como o menor dos números dados é $3^3-3=27-3=24$, o MDC tem de ser maior do que ou igual a 24. Agora, observe que cada um dos números dados é da forma n^n-n, com n um número inteiro ímpar maior do que 1. Seja $n=2k+1$, onde k é um inteiro maior do que ou iguak a 1. Então:

$$n^n-n=n\cdot(n^{n-1}-1)=n\cdot[n^{2k}-1]=n\cdot[(n^2)^k-1]=$$

$$=n\cdot(n^2-1)\cdot(n^{2k-2}+n^{2k-4}+\ldots+1)=n\cdot(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^{2k-2}+n^{2k-4}+\ldots+1)$$

Como um dos números $(n-1)$, n, $(n+1)$ é divisível por 3, segue que $n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$ é divisível por 3. Por outro lado, temos que:

$$(n-1)\cdot(n+1)=(2k+1-1)\cdot(2k+1+1)=2k\cdot(2k+2)=4k(k+1),$$

que é divisível por $4\cdot 2=8$, pois k ou $k+1$ é par. Logo, n^n-n é divisível por $3\cdot 8=24$, para todo $n=3,\ 5, 7,\ \ldots,\ 2019$. Portanto, o MDC dos números dados é 24.

3. A quantidade de maneiras de se escrever o número 100 como soma de três inteiros positivos é:

- ◯ (a) 98
- ◯ (b) 300
- ◯ (c) 30.000
- ◯ (d) 156.849
- ◯ (e) 161.700

Solução A resposta correta é a alternativa $(\mathrm{ANULADA})$.

Observe que $100=\underbrace{1+1+1+1+\ldots+1+1}_{100\ \text{parcelas iguais a}\ 1}$. Desse modo, aparecem 99 sinais $+$ quando expressamos o número 100 como soma de cem parcelas iguais a 1. Como queremos escrever o número 100 como soma de exatamente três parcelas, temos de escolher dentre os 99 sinais $+$ exatamente 2 deles. A quantidade de maneiras distintas de se escolher 3 sinais dentre 99 deles é:

$$\binom{99}{2}=\frac{99!}{97!\cdot 2!}=\frac{99\cdot 98\cdot 97!}{97!\cdot 1\cdot 2}=\frac{99\cdot 98}{2}=4.851.$$

Duas coisas nos levaram a anular a questão; a primeira (e evidente) é a falta dessa resposta entre as alternativas; a segunda é que não está bem claro no enunciado, se deveríamos ou não contar como maneiras distintas as permutações de três números inteiros positivos cuja soma seja 100. Para que a resposta seja essa que estamos sugerindo é preciso que consideremos como decomposições diferentes, por exemplo, $10+20+70$ e $20+70+10$, assim como as demais permutações desses três números. No caso em que essas decomposições não são consideradas como decomposições distintas o problema é muito mais delicado. Nesse caso, o problema ESTÁ RELACIONADO com o famoso problema de particionar um inteirpo positivo como soma de parcelas inteiras positivas (desconsiderando a ordem das parcelas). Esse problema foi estudado orignalmente pelo famoso matemático indiano Srinivasa Ramanujan e há uma vasta literatura para o tema, mas inda hoje não se conhece uma fórmula "simples"para um inteiro positivo arbitrário n. Há uma fórmula bem complicada envolvendo recursos mais avançados, como por exemplo, variáveis complexas.

4. O menor natural n para o qual 10^n-1 é múltiplo de 63 é:

   - ◯ (a) 8
   - ◯ (b) 7
   - ◯ (c) 6
   - ◯ (d) 5
   - ◯ (e) 4

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Sabemos que:

$$10^n-1=(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)=9.(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1).$$

Ora, como $63=9.7$ para que 10^n-1 seja divisível por 63, basta que $10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+1$ seja divisível por 7. Mas ocorre que

$$10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1=\underbrace{111\cdots1}_{n \text{ algarismos}}.$$

Por outro lado, na sequência $1,11,111,1111,11111,111111,\ldots$ o menor número que é divisível por 7 é 111111. Portanto o menor n que faz com que 10^n-1 seja divisível por 63 é aquele em que $n=6$.

5. Seja $K=9+99+999+9999+\ldots+\underbrace{9999\ldots99}_{321\ \text{dígitos}}$. A soma dos dígitos de K é igual a:

   - ◯ (a) 321
   - ◯ (b) 322
   - ◯ (c) 341
   - ◯ (d) 342
   - ◯ (e) 642

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Podemos escrever:

$$K=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\ldots+(10^{321}-1)=$$

$$=(10+10^2+10^3+10^4+\ldots+10^{321})-\underbrace{(1+1+1+1+\ldots+1)}_{321\ \text{parcelas}}$$

$$= \frac{10\cdot(10^{321}-1)}{9} - 321 = \underbrace{1111\ldots11}_{318 \text{ dígitos}}1110 - 321 = \underbrace{1111\ldots11}_{318 \text{ dígitos}}0879$$

Portanto, a soma dos dígitos do número K é igual a: $318 \cdot 1 + 0 + 8 + 7 + 9 = 342.$

6. Chamamos de *invocado* um número natural n cujo produto de seus divisores é igual 10^9. A quantidade de números *invocados* é:
   - ◯ (a) 0
   - ◯ (b) 1
   - ◯ (c) 2
   - ◯ (d) 10
   - ◯ (e) infinita

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Como a decomposição em fatores primos de 10^9 é dada por:

$$10^9 = (2\cdot 5)^9 = 2^9 \cdot 5^9,$$

os únicos divisores primos de um número *invocado* são 2 e 5. Isto significa que um número *invocado* n se escreve da seguinte forma:

$$n = 2^a \cdot 5^b, \text{ onde} a, b \in Z, \text{ com } a \geq 1 \text{ e } b \geq 1$$

Quando $a = b = 2$, temos $n = 2^2 \cdot 5^2 = 100$, que é um número *invocado*. De fato, multiplicando os divisores positivos de n, obtemos:

$$1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 10\cdot 20\cdot 25\cdot 50\cdot 100 = (1.\cdot 100)\cdot(2\cdot 50)\cdot(4\cdot 25)\cdot(5\cdot 20)\cdot 10 = 100^4\cdot 10 = 10^9.$$

Vamos provar que 100 é o único número *invocado*. Seja $m = 2^a \cdot 5^b$. Temos que mostrar que, se $a \geq 3$, $b \geq 4$ ou $0 \leq a < 2$ e $0 \leq b < 2$, o número m **não** é *invocado*. De fato, se $m = 2^a \cdot 5^b$, com $b \geq 3$, então teremos obrigatoriamente como divisores de m dentre outros os seguintes números:

$$5,\ 25,\ 125,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 25,\ 2\cdot 125.$$

Mas, com isso 10^9 teria o número 5 com a potência no mínimo: $1+2+3+1+2+3 = 12$, que é uma contradição, pois a potência de 5 é 9.
De modo análogo, se $a \geq 3$, teríamos a potência de 2 em 10^9 sendo no mínimo 12, que é uma contradição. Assim, $a \leq 2$ e $b \leq 2$.
Se $b = 1$, então $m = 2^a \cdot 5$, com $a \leq 2$, teríamos como divisores de m com a participação de no máximo três 5: 5, $2\cdot 5$, $2^2 \cdot 5$, o que insuficiente, pois tem de aparecer 9 cincos. Por argumento análogo, podemos concluir que $a = 1$ não satisfaz.
Portanto, $n = 2^2 \cdot 5^2 = 100$ é o único número *invocado*.

7. Definimos uma sequência, x_n, de números da seguinte maneira:
   - O primeiro termo da sequência, x_1, é igual a 2;
   - Se um termo da sequência é igual a a, o termo seguinte é igual a $\frac{a-1}{a+1}$. Ou seja, se $x_k = a$, então $x_{k+1} = \frac{a-1}{a+1}$.

   O termo da sequência na posição 2019, isto é, x_{2019}, é igual a:

◯ (a) 1

◯ (b) $-\frac{1}{2}$

◯ (c) -3

◯ (d) 2018

◯ (e) -2019

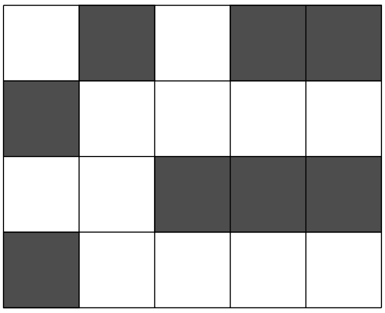
Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Da definição da sequência, temos:

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1} = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{\frac{-1}{2}-1}{\frac{-1}{2}+1} = -3,\ x_5 = \frac{-3-1}{-3+1} = 2, \ldots$$

É fácil ver que a sequência se repete num ciclo de comprimento 4. Como $2019 = 4 \cdot 504 + 3$, temos que: $x_{2019} = -\frac{1}{2}$.

8. Você quer pintar de preto algumas das casas de um tabuleiro 4×5, de modo que cada casa não pintada compartilhe pelo menos um lado com alguma casa pintada. Por exemplo, a Figura abaixo mostra uma pintura que satisfaz as hipóteses.



O número mínimo de casas a serem pintadas de preto é:

◯ (a) 5

◯ (b) 6

◯ (c) 7

◯ (d) 8

◯ (e) 9

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

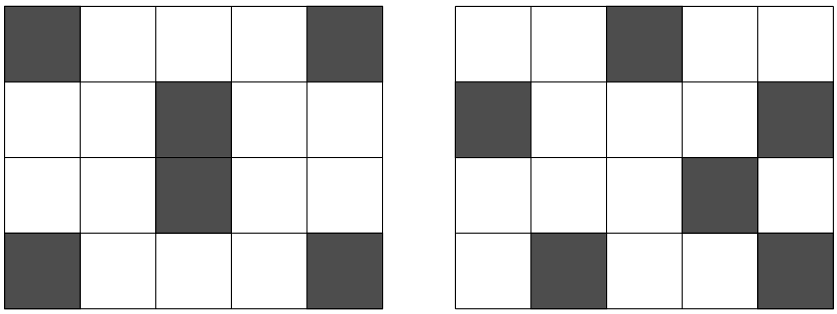
Vamos mostrar que:

- Como menos de 6 casas pintadas não é possível satisfazer ao problema;
- É possível resolver o problema pintando exatamente seis casas.

Para ver que não é possível uma solução pintando menos de seis casas, observe inicialmente que o tabuleiro possui 20 casas e identificamos algumas delas: as 4 situadas nos quatro cantos do tabuleiro (que representamos por E), as 14 casas situadas no bordo do tabuleiro e duas centrais (que representamos por C), veja Figura a seguir.

E				**E**
		C		
		C		
E				**E**

Suponha que seja possível resolver o problema com apenas 5 quadrados pretos. Como cada casa numa esquina do tabuleiro deve estar ao lado de uma casa pintada de preto, então deve haver pelo menos 4 casas pretas no bordo; mas cada uma delas compartilha um lado com no máximo 4 casas, de modo que com estas 4 compartilham um lado com no máximo $4 \cdot 4 = 16$ casas, ficando descobertos os dois quadrados centrais C e uma única casa pintadad de preto não pode cobrir as quatro que faltam.
Nas figuras a seguir, mostramos que é possível resolver o problema pintando exatamente 6 casas do tabuleiro.

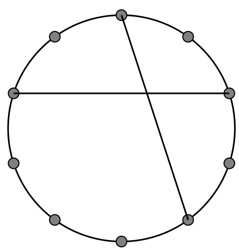


9. Em volta de um círculo marcamos-se 10 pontos, $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$, igualmente espaçados e traçamos 5 segmentos ligando pares desses pontos. A quantidade total de maneiras distintas de se traçar os 5 segmentos de modos que apenas um par desses segmentos se cruzem é:

   ◯ (a) 630
   ◯ (b) 252
   ◯ (c) 120
   ◯ (d) 45
   ◯ (e) 5

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Observe que, quando um par desses segmentos se interceptam eles dividem o círculo em quatro arcos, veja figura a seguir.



A fim de permitir que os pares de segmentos restantes não tenham ponto de interseção, os arcos determinados por eles tem de ter um número ímpar de pontos, veja figura a seguir.

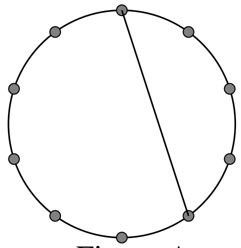


Figura A

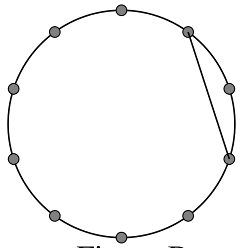


Figura B

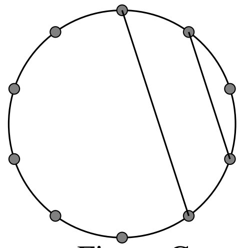
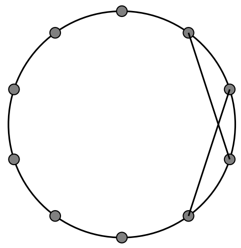
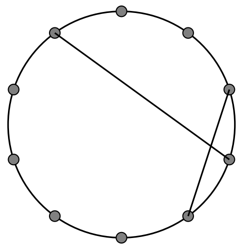
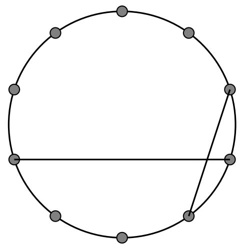


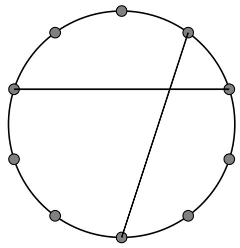
Figura C

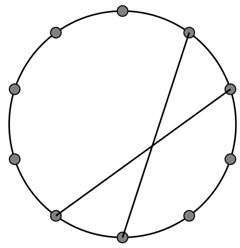
Desconsiderando a rotação do círculo, um segmento que não intercepta outro é de um dos dois tipos mostrados nas figuras A e B acima.
Assim, desconsiderando rotações, existem apenas quatro maneiras de ter um par de segmentos que se interceptam. Na figura a seguir, listamos a quantidade de maneiras de juntar pares de pontos de modo que os correspondentes segmentos não criem mais auto-interseção.


5


2


2


1


2

Então, contando rotações, o número de pares de segmentos com uma única interseção é:

$$10 \cdot (5+2+2+1+2) = 10 \cdot 12 = 120$$

.

10. Um programa de computador gera uma sequência de 2019 números, de acordo com a seguinte regra:

- O primeiro número é o 1;
- Depois de gerar o número x, o próximo número gerado é igual a $x + \frac{1}{[x]}$, onde $[x]$ é o maior número inteiro menor do que ou igual a x.

Os primeiros números da sequência são:

$$1,\ 1+\frac{1}{[1]} = 1+1 = 2,\ 2+\frac{1}{[2]} = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2},\ \frac{5}{2}+\frac{1}{\left[\frac{5}{2}\right]} = \frac{5}{2}+\frac{1}{2} = 3, \ldots$$

O último número que o programa gera é:

- (a) $\frac{1340}{21}$
- (b) $\frac{2019}{63}$
- (c) $\frac{1340}{21}$
- (d) $\frac{1953}{21}$
- (e) $\frac{2049}{32}$

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Supona que o número inteiro $n > 1$ esteja na sequência gerada pelo computador. Assim, os termos seguintes a n são:

$$\frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \frac{n^2+3}{n}, \ldots, \frac{n^2+(n-1)}{n}, \frac{n^2+n}{n} = n+1.$$

Logo, se escrevemos na forma de frações racionais todos os números da sequência gerada pelo computador, teremos uma fração com denominador 1, 2 frações com denominador 2, 3 frações com denominador 3, 4 frações com denominador 4, $\ldots\ldots$, n frações com denominador n, e assim sucessivamnte. Assim, a sequência gerada é:

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \ldots, \frac{4}{2}, \frac{n^2}{n}, \frac{n^2+1}{n}, \ldots, \frac{n^2+n-1}{n}$$

Seja x o último número da sequência de 2019 números gerado pelo computador. Se x tem denominador k, temos que:

$$1+2+3+\ldots+k \geq 2019 \Leftrightarrow \frac{k\cdot(k+1)}{2} \geq 2019 \Leftrightarrow k\cdot(k+1) \geq 4038.$$

É fácil ver que o maior k que satisfaz a desigualdade é $k = 63$, pois $63 \cdot 64 = 4032$. Por outro lado, a quantidade de termos da sequência até o último termo com denominador 63 é igual a $\frac{63\cdot 64}{2} = \frac{4032}{2} = 2016$, faltando precisamente $2019 - 2016 = 3$ termos para gerar o último termo. Portanto, pelo que vimos acima, o último termo é:

$$x = \frac{64^2+(3-1)}{64} = \frac{4098}{64} = \frac{2049}{32}.$$

11. As somas a seguir possuem a mesma quantidade de parcelas:

$$S_1 = 1+2+3+4+\cdots$$

$$S_2 = 100+99+98+97+\cdots$$

Se $S_1 = S_2$, podemos afirmar que a quandidade de parcelas em cada soma é:

- (a) 54
- (b) 72
- (c) 67
- (d) 100
- (e) 50

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Suponha que S_1 e S_2 tenham n parcelas. Nesse caso,

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Portanto,

$$S_1+S_2 = (1+100)+(2+99)+(2+98)+\cdots = 101n.$$

Por outro lado, se $S_1 = S_2$, segue que

$$S_1+S_2 = 2S_1 \Rightarrow 101n = 2\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n = 100.$$

12. Se b e c são números inteiros tais que $x = \sqrt{19}+\sqrt{98}$ é uma raiz da equação $x^4+bx^2+c=0$, podemos afirmar que $b+c$ é igual a:

   - ◯ (a) 6007
   - ◯ (b) 5907
   - ◯ (c) 3337
   - ◯ (d) 4557
   - ◯ (e) 6777

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Sendo $x = \sqrt{19}+\sqrt{98}$, segue que:

$$x^2 = (\sqrt{19}+\sqrt{98})^2 \Rightarrow x^2 = 19+2\sqrt{19}\sqrt{98}+98 \Rightarrow$$

$$x^2-117 = 2\sqrt{19.98} \Rightarrow (x^2-117)^2 = (2\sqrt{1862})^2 \Rightarrow$$

$$x^4-234x^2+13689 = 7448 \Rightarrow x^4-234x^2+6241 = 0,$$

o que revela que na equação $x^4+bx^2+c=0$ podemos tomar $b=-234$ e $c=6241$. Assim, $b+c = -334+6214 = 6007$.

13. Para um torneio de futebol mundial, 24 países, dentre os quais Brasil, Argentina, Alemanha e Itália, são divididos em 6 grupos distintos, contendo 4 equipes cada um. Encontre a probabilidade de que ocorram os seguintes dois eventos simultaneamente: Brasil e Argentina num mesmo grupo e Alemanha e Itália caiam também juntos num outro grupo.

   - ◯ (a) $\frac{3}{101}$
   - ◯ (b) $\frac{30}{1771}$
   - ◯ (c) $\frac{31}{1001}$
   - ◯ (d) $\frac{33}{1011}$
   - ◯ (e) $\frac{33}{1001}$

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Contando os casos favoráveis, temos 6 possibilidades para o grupo a ser escolhido para Brasil e Argentina e 5 possibilidades para o grupo de Alemanha e Itália. Escolhendo os outros dois países de cada um desses grupos e escolhendo os 4 componentes dos outros 4 grupos, temos $6.5.\binom{20}{2}\binom{18}{2}\binom{16}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$ possibilidades para que essa configuração ocorra. Ora, como o total de maneiras de se dividirem os países nos grupos sem nenhuma restrição é $\binom{24}{4}\binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}$, a probabilidade solicitada é:

$$= \frac{6.5.\binom{20}{2}\binom{18}{2}}{\binom{24}{4}\binom{20}{4}} = \frac{30}{1771}.$$

14. Seja z um número complexo tal que $z^{2019} = 1 + i$ e $z^{2018} = 1 - i$, com $i^2 = -1$. Podemos afirmar que o argumento de z é igual a:

- ◯ (a) $\frac{\pi}{3}$
- ◯ (b) $\frac{\pi}{4}$
- ◯ (c) $\frac{\pi}{2}$
- ◯ (d) $\frac{3\pi}{5}$
- ◯ (e) $\frac{2\pi}{3}$

Solução A resposta correta é a alternativa (c).

Ora, como $z^{2019} = 1 + i$ e $z^{2018} = 1 - i$, segue que:

$$\begin{aligned} z = \frac{z^{2019}}{z^{2018}} &= \frac{1+i}{1-i} \\ &= \frac{(1+i)}{(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} \\ &= \frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-(-1)} \\ &= \frac{1+2i+(-1)}{2} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

Ora, como $z = i$, segue que o seu argumento é igual a $\frac{\pi}{2}$.

15. O valor da expressão

$$M = \frac{(1+\operatorname{tg} 1^o)(1+\operatorname{tg} 2^o)(1+\operatorname{tg} 3^o)\cdots(1+\operatorname{tg} 44^o)}{2^{13}}$$

é:

- ◯ (a) 512
- ◯ (b) 256
- ◯ (c) $1024\sqrt{2}$
- ◯ (d) $2019\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ◯ (e) $128\sqrt{6}$

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

Sabemos que

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga.tgb}\Rightarrow tg(a+b)-tga.tgb.tg(a+b)=tga+tgb.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(1+tga)(1+tgb)=&\ 1+tgb+tga+tga.tgb\\ =&\ 1+tg(a+b)-tga.tgb.tg(a+b)+tga.tgb\\ =&\ 1+tg(a+b)-tga.tgb[tg(a+b)-1]\end{aligned}$$

No caso em que $a+b=45^o$, temos:

$$(1+tga)(1+tgb)=1+\underbrace{tg(a+b)}_{=1}-tga.tgb[\underbrace{tg(a+b)}_{=1}-1]\Rightarrow(1+tga)(1+tgb)=2$$

Diante do exposto, segue que

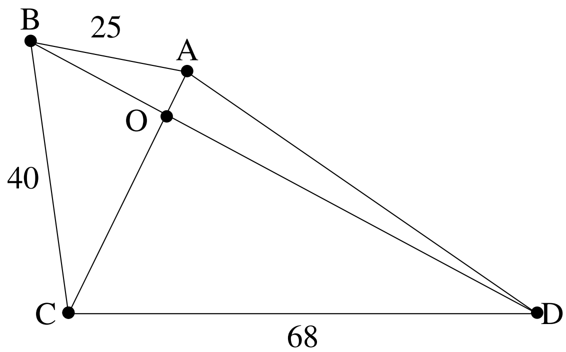
$$\begin{aligned}(1+tg1^o)(1+tg44^o)&=2\\(1+tg2^o)(1+tg43^o)&=2\\(1+tg3^o)(1+tg42^o)&=2\\&\vdots\\(1+tg22^o)(1+tg23^o)&=2\end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro essas 22 igualdades, segue que

$$\underbrace{(1+tg1^o)(1+tg44^o)(1+tg2^o)(1+tg43^o)\cdots(1+tg22^o)(1+tg23^o)}_{=2^{13}.M}=2^{22}\Rightarrow$$

$$2^{13}.M=2^{22}\Rightarrow M=2^9=512.$$

16. A figura a seguir mostra um quadrilátero no qual as diagonais são perpendiculares entre si e se intersectam no ponto O. A medida da diagonal AC é 39, e os comprimentos dos lados AB, BC e CD são indicados na figura.



A distância do ponto B ao ponto O é igual a:

◯ (a) 7

- ◯ (b) 24
- ◯ (c) 25
- ◯ (d) 31
- ◯ (e) 32

Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Aplicando o teorema de Pitágoras para os trângulos retângulos: ΔAOB e ΔBOC, temos:

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=25^2=625 \quad (*)$$

$$\overline{OC}^2+\overline{OB}^2=40^2=1600 \quad (**)$$

Diminuindo membro a membro as duas equações, $(**)-(*)$, obtemos:

$$\overline{OC}^2-\overline{OA}^2=1600-625=975$$

Mas, temos que:

$$\overline{OC}^2-\overline{OA}^2=\underbrace{(\overline{OC}+\overline{OA})}_{=\overline{AC}=39}\cdot(\overline{OC}-\overline{OA})=39(\overline{OC}-\overline{OA})=975$$

Logo, temos $(\overline{OC}-\overline{OA})=\frac{975}{39}=25 \qquad (***)$. Como, por hipótese, $\overline{OC}+\overline{OA}=39 \quad (****)$, segue de $(***)$ e $(****)$ que $\overline{OA}=\frac{39-25}{2}=7$. Usando este resultado em $(*)$, obtemos:

$$7^2+\overline{OB}^2=625 \Rightarrow \overline{OB}^2=625-49=576 \Rightarrow \overline{OB}=24$$

17. Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $f(x)=2x+3$ e $g(x+2)=f(f(x-1).f(x+1)+f(x))$. O valor de $g(6)$ é:

- ◯ (a) 101
- ◯ (b) 143
- ◯ (c) 403
- ◯ (d) 203
- ◯ (e) 259

Solução A resposta correta é a alternativa (e).

Faxendo $x=4$ em $g(x+2)=f(f(x-1).f(x+1)+f(x))$, segue que:

$$\begin{aligned} g(6) = & \; g(4+2)=f(f(4-1).f(4+1)+f(4)) \\ = & \; f(f(3).f(5)+f(4)) \\ = & \; f(9.13+11) \\ = & \; f(128)=259. \end{aligned}$$

18. Uma permutação de um conjunto A é uma função bijetiva $\sigma:A\to A, x\mapsto\sigma(x)$. Seja σ uma permutação dos elementos do conjunto $A=2,3,4,\ldots,2019$. O maior valor possível para a expressão

$$P=\log_2\sigma(2).\log_3\sigma(3).\cdots.\log_{2019}\sigma(2019)$$

é:

○ (a) 2018
○ (b) 1
○ (c) 0
○ (d) 2019
○ (e) 2019^{-1}

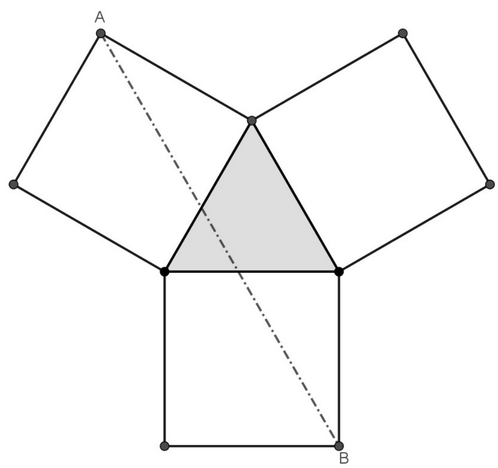
Solução A resposta correta é a alternativa (b).

Fazendo uma mudança para a base 10 (poderia ser outra base qualquer!), segue que:

$$\begin{aligned} P = & \log_2 \sigma(2).\log_3 \sigma(3).\cdots.\log_{2019} \sigma(2019) \\ = & \frac{\log\sigma(2)}{\log 2}\cdot\frac{\log\sigma(3)}{\log 3}\cdots\frac{\log\sigma(2019)}{\log 2019} \\ = & \frac{\log\sigma(2).\log\sigma(3)\cdots\log\sigma(2019)}{\log 2.\log 3\cdots.\log 2019} \end{aligned}$$

Ora, como $\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(2019)$ é apenas uma permutação dos números $1,2,3,\cdots,2019$ segue que $\log\sigma(2),\log\sigma(3),\cdots\log\sigma(2019)$ são os mesmos valores de $\log 2,\log 3,\cdots,\log 2019$ em alguma ordem, o que revela que o numerador de P e o denominador de P são iguais e portanto $P=1$.

19. Um triângulo equilátero tem lado 6. Sobre cada um dos seus lados foi construído um quadrado, conforme ilustra a figura abaixo:

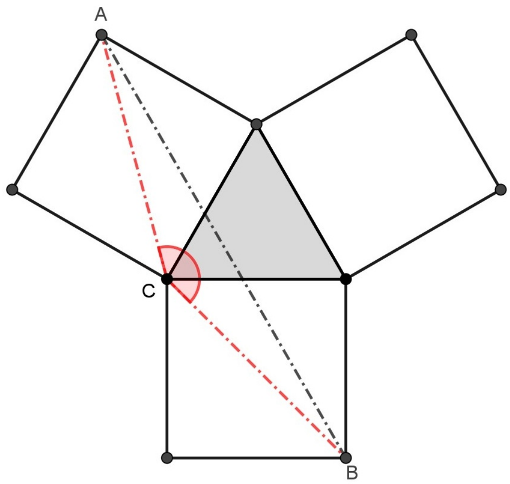


A distância entre os vértices A e B é:

○ (a) $4\sqrt{6+2\sqrt{3}}$
○ (b) $6\sqrt{4+3\sqrt{2}}$
○ (c) $3\sqrt{4+2\sqrt{6}}$
○ (d) $6\sqrt{4+2\sqrt{3}}$
○ (e) $2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Solução A resposta correta é a alternativa (d).

Seja C o vértice comum aos quadrados que contém os pontos A e B, conforme ilustra a figura a seguir:



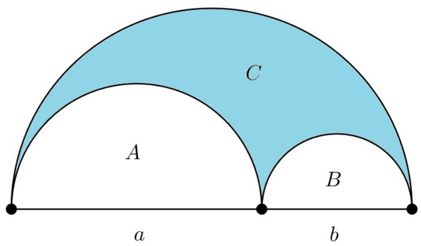
Ora, como AC e BC são diagonais de um quadrado de lado 6, segue que $AC = BC = 6\sqrt{2}$. Por outro lado o ângulo $A\widehat{C}B$ mede $45^o + 60^o + 45^o = 150^o$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, obtém-se:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos 150^o \Rightarrow$$

$$AB^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2.6\sqrt{2}.6\sqrt{2}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$AB = 6\sqrt{4+2\sqrt{3}}.$$

20. Três semicírculos são tangentes dois a dois, conforme ilustra a figura abaixo:



Se a, b e $a+b$ são as medidas dos diâmetros desses três semicírculos e A, B e C são (respectivamente) as medidas das áreas do semicírculo de diâmetro a, do semicírculo de diâmetro b e da região hachurada, na figura acima, podemos afirmar que necessariamente:

- ◯ (a) $A + B \geq C$
- ◯ (b) $A < B + C$
- ◯ (c) $C = \frac{A+B}{2}$
- ◯ (d) $C = \sqrt{AB}$
- ◯ (e) $C = A^2 + AB + B^2$

Solução A resposta correta é a alternativa (a).

De acordo com o enunciado, $A = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^4}{4}, B = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{4}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} C = & \ \pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - A - B \\ = & \ \frac{\pi(a^2+2ab+b^2)}{4} - \frac{\pi a^4}{4} - \frac{\pi a^4}{4} \\ = & \ \frac{\pi ab}{2} \end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue que

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{4} \geq \frac{ab}{2}$$

Multiplicando os dois membros da desigualdade acima por π, segue que

$$\frac{\pi a^2+\pi b^2}{4} \geq \frac{\pi ab}{2} \Rightarrow \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} \geq \frac{\pi ab}{4} \Rightarrow A+B \geq C.$$