Olimpíada de Matemática do Estado do Rio Grande do Norte - 2020

SOLUÇÃO DA LISTA DE PROBLEMAS 01

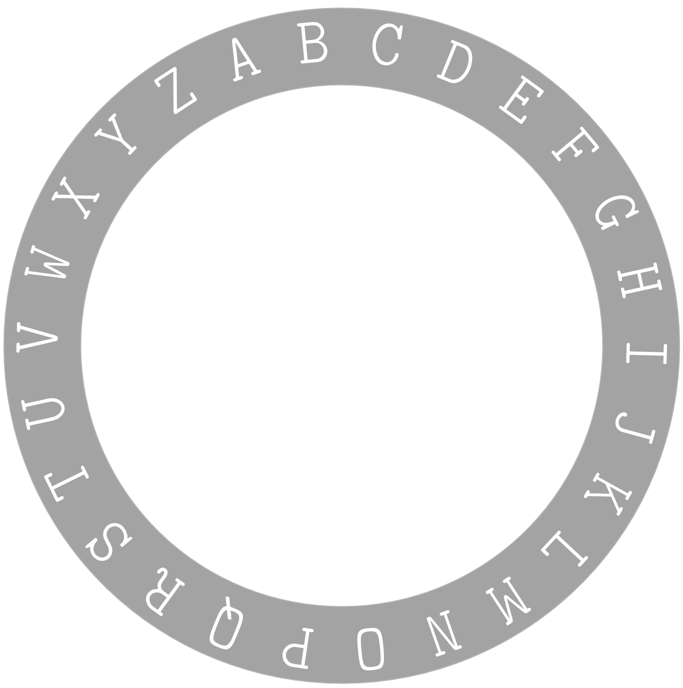
PROBLEMA PARA O NÍVEL 1

As 26 letras do nosso alfabeto estão escritas em ordem, no sentido horário, em torno de um círculo. Cria-se um código de uma mensagem substituindo cada letra da mensagem pela letra que está situada 4 posições adiante, no sentido horário, da letra original. (Isso é chamado de cifra de César ou código de César). Por exemplo, a mensagem ZAP é decifrada como DET.

Qual é o texto cifrado da mensagem WIN?

Solução

Movendo 3 posições no sentido horário a partir de W, chegamos à letra Z.



Movendo 1 letra no sentido horário a partir da letra Z, o alfabeto começa novamente em A. Assim, a letra que está situada 4 posições no sentido horário a partir de W é A.
Movendo 4 posições no sentido horário a partir de I, chegamos à letra M. Movendo 4 posições no sentido horário a partir de N, chegamos à letra R.
Portanto, o texto cifrado da mensagem WIN é AMR.

PROBLEMA PARA O NÍVEL 2

O número inteiros de 1 a 500 estão escritos num quadro negro. Os jogadores A e B disputam uma partida, jogando alternadamente e começando com A. Uma jogada consiste em eliminar um dos números escritos e o jogo termina quando só restam dois números. O jogador B vence se a soma dos dois números restantes é divisível por 3 e o jogador A ganha se a soma dos dois números restantes não é divisível por 3.
Verifique que o jogador B possui uma estratégia vencedora, não importando como o jogador A jogue, e descreva a estratégia de B.

Solução

Inicialmente, observe que entre os números inteiros de 1 a 500 existem:

- 166 deles que são múltiplos de 3: $3, 6, 9, \ldots, 498$;
- 167 deles que deixam resto 1 quando divididos por 3: $1, 4, 7, \ldots, 499$;
- 167 deles que deixam resto 2 quando divididos por 3: $2, 5, 8, \ldots, 500$;

O jogador B faz suas jogadas da seguinte forma: se na jogada anterior o jogador A removeu o número a, B remove um número b de forma que $a+b$ seja um múltiplo de 3. Ou seja, se A remover um múltiplo de 3, B também remove um múltiplo de 3, se A remove um número que deixa resto 1 na divisão por 3, B remove um que deixa resto 2 e vice-versa.
Agora, vamos ver que é sempre possível para B jogar assim.
Como no início há um número par de múltiplos de 3, após cada rodada resta novamente um número par de múltiplos de 3. Então, se A remover um múltiplo de 3, o jogador B pode remover outro. Por outro lado, é fácil observar que, em uma rodada remove-se um número que deixa resto 1 na divisão por 3 se e somente se remove-se um número que deixa resto 2 na divisão por 3. Como no início há a mesma quantidade de cada tipo, após cada rodada haverá a mesma quantidade também, e se A removeu um de um tipo, B pode remover um do outro tipo.
Observe que em cada rodada a soma total dos números inteiros de 1 a 500 foi reduzida por um múltiplo de 3 e, como no início a soma total dos números era:

$$\frac{500 \cdot 501}{2} = 250 \cdot 501 = 125.250,$$

que é divisível por 3, a soma dos dois números finais tem de ser divisível por 3 e o jogador B vence.
Observação - A soma de todos os números inteiros de 1 a 500 pode ser escrita de dois modos (dando o mesmo valor!):

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 498 + 499 + 500$$

$$S = 500 + 499 + 498 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Somando membro a membro, temos:

$$2S = (1+500) + (2+499) + (3+498) + \ldots + (498+3) + (499+2) + (500+1) = 500 \cdot 501 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{500 \cdot 501}{2} = 250 \cdot 501 = 125.250.$$

PROBLEMA PARA O NÍVEL 3

Você tem cinco pedaços de papel. Você escolhe um ou mais deles e corta cada um deles em cinco pedaços menores. Agora você pega um ou mais desses pedaços e corta cada um deles em cinco pedaços menores. E assim por diante.
Prove que, desta maneira, você nunca terá 2020 pedaços de papel.

Solução

Observe que, cada vez que você corta um pedaço de papel em cinco pedaços menores, você acrescenta quatro pedaços ao total de pedaços de papel existentes. Por outro lado, no início a quantidade de pedaços de papel, 5, deixa resto 1 na divisão por 4. Durante todo o processo, a quantidade de pedaços de papel deixará sempre resto 1 na divisão por 4. Como 2020 deixa resto 0 na divisão por 4, você nunca vai atingir a quantidade de 2020 pedaços de papel.

PROBLEMA PARA O NÍVEL UNIVERSITÁRIO

Encontre o valor da soma:

$$(1^2+1)\cdot 1! + (2^2+1)\cdot 2! + \ldots + (2020^2+1)\cdot 2020!$$

Solução

Queremos encontrar o valor da soma $S = \sum_{n=1}^{K}(n^2+1)\cdot n!$, quando $K = 2020$. Agora, observe que podemos escrever:

$$S = \sum_{n=1}^{K}(n^2+1)\cdot n! = \sum_{n=1}^{K}(n^2+n-n+1)\cdot n! = \sum_{n=1}^{K}[(n^2+n)\cdot n! - (n-1)\cdot n!] \Longrightarrow$$

$$S = \sum_{n=1}^{K}[n\cdot(n+1)\cdot n! - (n-1)\cdot n!]$$

Como $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$, temos que

$$S = \sum_{n=1}^{K}[n\cdot(n+1)! - (n-1)\cdot n!],$$

que é uma "série telescópia", o que é fácil ver que

$$S = K\cdot(K+1)! - 0\cdot 1! = K(K+1)!$$

Como $K = 2020$, segue que $S = 2020 \cdot 2021!$.