XXXI OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO RIO GRANDE DO NORTE 2020 - FASE ÚNICA - PROVA DO NÍVEL III

PARA CADA QUESTÃO,
ASSINALE **UMA** ALTERNATIVA COMO A RESPOSTA CORRETA

1. **(Anulada por erro de digitação: A resposta correta seria 411)**. A quantidade de números naturais de 200 até 800, inclusive, que não são divisíveis nem por 5 e nem por 7 é:

   (a) 680
   (b) 207
   (c) 412
   (d) 601
   (e) 385

2. Seja A o conjunto de todos os números inteiros de 1 até 300 inclusive. Consideramos todos os ternos de números que se pode formar utilizando três números distintos de A, e para cada terno, calculamos sua soma.

   A quantidade desses ternos de números para os quais a soma é um múltiplo de 3 é:

   (a) 33
   (b) 98802
   (c) 10000
   (d) 161700
   (e) $1485100\checkmark$

3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1,$$

para todo número real x.

O valor de $f(1)$ é:

(a) 0
(b) $1\checkmark$
(c) -1
(d) 2019
(e) 2020

4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y)),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $f(2) = 8$, calcule $f(2020)$.

(a) 2020
(b) 2022
(c) 2024
(d) $2026\checkmark$
(e) 2028

5. Dois inteiros positivos x e y são tais que:

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$$

Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

(a) 6044
(b) 7044
(c) $8044\checkmark$
(d) 9044
(e) 10044

6. Em um programa de tv três homens escolhem, independentemente, suas mulheres favoritas entre três mulheres e, ao mesmo tempo, estas três mulheres escolhem seus homens favoritos. Se um homem e uma mulher escolhem

um ao outro, então eles ganham uma viagem. Qual a probabilidade que o programa distribua três viagens?

(a) $0,2\%$
(b) $0,8\%\checkmark$
(c) $2,5\%$
(d) 4%
(e) $16,7\%$

7. Os três inteiros positivos a, b e c satisfazem

$$4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$$

Determine o valor de $a+b+c$.

(a) 28
(b) 32
(c) $36\checkmark$
(d) 42
(e) 48

8. **(Anulada por erro de digitação: A resposta correta: $\frac{\sqrt{3}+1}{128}$).** Sejam

$$k = cos 10^o.cos 50^o.cos 70^o + sen 10^o.sen 50^o.Sen 70^o \text{ e}$$

$$w = 256.sen 10^o.sen 30^o.sen 50^o.sen 70^o$$

a razão $\frac{k}{w}$ é:

(a) $\frac{1}{8}$
(b) $\frac{1}{9}$
(c) $\frac{3}{8}$
(d) $\frac{1}{16}$
(e) $\frac{1}{32}$

9. Três estudantes sentados em volta de uma mesa participam da seguinte brincadeira. O professor fala em voz alta o número 13 e o primeiro estudante soma 1 e fala em voz alta 14, o segundo soma 2 a esse número e fala em voz alta 16, o terceiro estudante soma 3 e diz 19, como agora é a vez do primeiro estudante, este soma 1 e diz em voz alta 20, e assim

por diante. Ouve-se Murilo falar em voz alta o número 61, Matias falar 40 e Melissa 602.

Dentre os estudantes, quem falou 2020 foi (foram):

(a) Murilo
(b) Matias ✓
(c) Melissa
(d) Murilo e Melissa
(e) Murilo e Matias

10. Sendo $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ (o coeficiente binomial), onde n e p são inteiros não negativos tais que $p \leq n$, sendo

$$S = \frac{\binom{11}{0}}{1} + \frac{\binom{11}{1}}{2} + \frac{\binom{11}{2}}{3} + \cdots + \frac{\binom{11}{11}}{12}$$

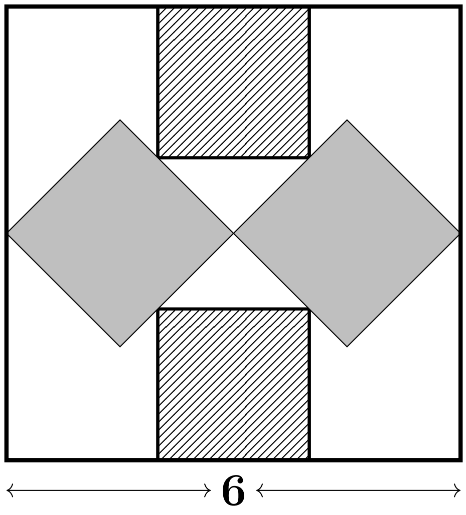
podemos afirmar que o valor de $\frac{S}{2^{12}-1}$ é:

(a) 1
(b) $\frac{1}{12}$ ✓
(c) $\frac{1}{24}$
(d) $\frac{1}{32}$
(e) $\frac{1}{48}$

11. Sejam a e b raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, o valor de $a^{13} + b^{13}$ é igual a:

(a) 385
(b) 442
(c) 521 ✓
(d) 650
(e) 700

12. Na figura a seguir, temos quatro quadrados desenhados na região limitada por um quadrado de lado medindo 6



Os quadrados sombreados do mesmo modo são congruentes.

A área correspondente aos 4 quadrados sombreados é:

(a) 4
(b) 8
(c) 13
(d) 12
(e) 17✓

13. Um fator entre 1000 e 5000 do número $2^{33} - 2^{19} - 2^{17} - 1$ é:
   (a) 1983✓
   (b) 1993
   (c) 2003
   (d) 2023
   (e) 2013

14. A soma $(1^2+1).1! + (2^2+1).2! + \cdots + (2020^2+1).2020!$ é igual a:
   (a) $2020 \cdot 2021!$✓
   (b) $2021 \cdot 2020!$
   (c) $2021 \cdot 2022!$
   (d) $2020 \cdot 2022!$
   (e) $2021 \cdot 2023!$

15. Seja A o subconjunto dos números inteiros positivos que só possuem $2, 3$

e 5 como fatores primos. A soma infinita:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots$$

corresponde à soma dos inversos multiplicativos dos elementos de A. A soma S pode ser representada pelo quocientes de dois inteiros $\frac{m}{n}$, onde $MDC(m; n) = 1$. O valor da soma $m + n$ é igual a:

(a) 8
(b) 16
(c) 17
(d) $19\checkmark$
(e) 23

16. A soma dos algarismos das raizes reais da equação

$$\frac{x-1}{2016} + \frac{x-3}{2014} + \cdots + \frac{x-2015}{2} = \frac{x-2}{2015} + \frac{x-4}{2013} + \cdots + \frac{x-2016}{1}$$

é igual a:

(a) $10\checkmark$
(b) 12
(c) 14
(d) 16
(e) 18

17. Em um quadrado $ABCD$ de área 1, E é ponto médio de DC, G é ponto médio de AD, F é ponto do lado BC tal que $3CF = FB$, O é o ponto de interseção entre FG e AE. Então a área do triângulo EFO é:

(a) $\frac{123}{112}$
(b) $\frac{13}{113}$
(c) $\frac{15}{112}\checkmark$
(d) $\frac{34}{112}$
(e) $\frac{123}{113}$

18. Qual o menor valor do inteiro positivo n para o qual $\frac{100!}{18^n}$ não é um número inteiro?

(a) 24

(b) $25\checkmark$
(c) 26
(d) 27
(e) 28

19. No polinômio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabe-se que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ e $P(3) = 30$. o valor de $\frac{P(12)+P(-8)}{10}$ é igual a:

    (a) $1984\checkmark$
    (b) 1988
    (c) 1992
    (d) 1996
    (e) 2000

20. **(Anulada por erro de digitação: A resposta correta seria 61)**. Um certo comitê se reuniu 40 vezes. Existiam 10 membros em cada encontro. nenhum par de membros se encontrou duas vezes. O número mínimo de membros do comitê era:

    (a) 55
    (b) 60
    (c) 65
    (d) 80
    (e) 90