XXXI OLIMPÍADA DE MATEMATICA DO RIO GRANDE DO NORTE 2020 - FASE ÚNICA - PROVA DO NÍVEL UNIVERSITÁRIO

PARA CADA QUESTÃO,
ASSINALE **UMA** ALTERNATIVA COMO A RESPOSTA CORRETA

1. A soma $(1^2 + 1).1! + (2^2 + 1).2! + \cdots + (2020^2 + 1).2020!$ é igual a:

   (a) $2020 \cdot 2021!\checkmark$
   (b) $2021 \cdot 2020!$
   (c) $2021 \cdot 2022!$
   (d) $2020 \cdot 2022!$
   (e) $2021 \cdot 2023!$

2. Considere o conjunto

$$S = \{1, 2, 3, \cdots, 2016\}$$

   A quantidade de elementos de S que tem a propriedade de que o quadrado deixa resto 1 na divisão por 2016 é:

   (a) 4
   (b) $8\checkmark$
   (c) 16
   (d) 1008
   (e) 1098

3. Os números $201, 204, 209, \cdots$ são da forma $a_n = 200 + n^2$, onde $n = 1, 2, 3, \cdots$. Para cada inteiro positivo n, seja $D_n = MDC(a_n, a_{n+1})$. O maior valor possível para D_n é:

   (a) 1

(b) 201
(c) 401
(d) 800
(e) $801 \checkmark$

4. Seja A o subconjunto dos números inteiros positivos que só possuem $2, 3$ e 5 como fatores primos. A soma infinita:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots$$

corresponde à soma dos inversos multiplicativos dos elementos de A. A soma S pode ser representada pelo quocientes de dois inteiros $\frac{m}{n}$, onde $MDC(m; n) = 1$. O valor da soma $m + n$ é igual a:

(a) 8
(b) 16
(c) 17
(d) $19 \checkmark$
(e) 23

5. O maior valor possível para a soma $\sum_{i=1}^{10} \cos(3x_i)$ com números reais $x_1, \cdots, x_{10}$ satisfazendo a igualdade $\sum_{i=1}^{10} \cos(x_i) = 0$ é:

(a) 1
(b) $\frac{201}{13}$
(c) $\frac{401}{29}$
(d) $\frac{480}{49} \checkmark$
(e) $\frac{1092}{73}$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \text{arctg}(x)$, para todos os números reais $x \neq 0$. (como de costume, $y = \text{arctg}(x)$ significa que $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ e $\text{tg}(y) = x$). Diante do exposto, podemos afirmar que $\frac{1}{\pi}\int_0^1 f(x)dx$ é igual a:

(a) $\frac{1}{7}$
(b) $\frac{2}{7}$

(c) $\frac{1}{8}$
(d) $\frac{3}{8}\checkmark$
(e) $\frac{1}{11}$

7. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{Q}$ e um operador linear $T : V \to V$ tal que $T^5 = Id$. Sabendo-se que se $v \in V$ é tal que $Tv = v$ implica que $v = 0$, podemos concluir que
   (a) $\dim V$ é divisível por $4\checkmark$.
   (b) $\dim V$ é divisível por 3.
   (c) $\dim V$ é divisível por 7.
   (d) $\dim V$ é divisível por 11.
   (e) $\dim V$ é divisível por 13.

8. Sejam A e B matrizes reais 2×2 cujo determinante é igual a 1. Nessa condições, podemos afirmar que

$$\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) + \mathrm{tr}(AB^{-1})$$

   é igual a:
   (a) -1.
   (b) $0\checkmark$.
   (c) 1.
   (d) 2.
   (e) -2.

9. Sejam n um inteiro positivo, $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tais que $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$. Considere o operador linear

$$f : M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$$
$$M \mapsto f(M) = \mathrm{tr}(AM).B$$

   Podemos afirmar que:
   (a) f é diagonalizável . $\checkmark$
   (b) O único autovalor de f é $\lambda = 0$.
   (c) O único autovalor de f é $\lambda = -1$.
   (d) O único autovalor de f é $\lambda = 1$.
   (e) O único autovalor de f é $\lambda = 2$.

10. Considerando a sequência (a_n) definida por $a_n = n^2 + n + 2$ para todo inteiro $n > 0$, podemos afirmar que:

    Existem infinitos valores de n para os quais a_n é um quadrado perfeito.
    (b) Existem apenas um valor de n para o qual a_n é um quadrado perfeito. ✓
    (c) Existem apenas cinco valores de n para os quais a_n é um quadrado perfeito..
    (d) Existem apenas dez valores de n para os quais a_n é um quadrado perfeito..
    (e) Existem apenas onze valores de n para os quais a_n é um quadrado perfeito.

11. A soma de todos os inteiros positivos m, s e t que satisfazem a equação $m! = 4.s! + 10.t!$ é :

    (a) 81
    (b) 72
    (c) 62✓
    (d) 94
    (e) 61

12. A função f definida no conjunto dos pares ordenados de números inteiros satisfazendo às seguintes condições:

    (a) $f(x, x) = x + 2$;
    (b) $f(x, y) = f(y, x)$;
    (c) $(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y)$.

    O valor de $f(9, 7)$ é igual a:

    (a) 181
    (b) 183
    (c) 185
    (d) 187
    (e) 189✓

13. Considere a sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 4^{3-n} + i.4^{4-n}$, para todo inteiro $n \geq 1$. . Se i é a unidade imaginária dos número complexos, Sendo S o módulo da soma ds infinitos termos dessa sequência, podemos afirmar que $\frac{S}{\sqrt{7}}$ é igual a:

(a) $\frac{2}{3}$
(b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{8}{3}$
(d) $\frac{16}{3}$
(e) $\frac{64}{3}$ ✓

14. O valor da integral definida $\frac{1}{\pi.\ln 2} \int_0^{\pi/4} \ell n(1 + tgx)dx$

(a) $\frac{1}{4}$
(b) $\frac{1}{6}$
(c) $\frac{1}{7}$
(d) $\frac{1}{8}$ ✓
(e) $\frac{1}{9}$

15. O valor do limite $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2} \displaystyle\int_2^x \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ é igual a:

(a) $\operatorname{sen} 4$
(b) $\operatorname{sen} 6$
(c) $\operatorname{sen} 2$ ✓
(d) $\operatorname{sen} 8$
(e) $\operatorname{sen} 10$

16. Considerando as equações quadráticas da forma $x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in [-100, 100]$, qual a probabilidade de que essa equação possua raízes reais?

(a) $\frac{14}{15}$
(b) $\frac{1}{15}$
(c) $\frac{13}{15}$
(d) $\frac{11}{15}$
(e) $\frac{4}{15}$ ✓

17. Se x, y e z são números naturais tais que

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ \sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+36} + \sqrt{z^2+81} = 30 \end{cases}$$

O produto $x.y.z$ é igual a:

(a) 345
(b) 389
(c) 342
(d) 384✓
(e) 432

18. Seja G um grupo multiplicativo de ordem 2020. Podemos afirmar que:

(a) G não possui um subgrupo de ordem 544✓
(b) G necessariamente possui um subgrupo de ordem 348
(c) G é necessariamente abeliano
(d) G necessariamente possui um subgrupo de ordem 201
(e) G é necessariamente isomorfo a um grupo de permutações

19. A função $f(x)$ satisfaz $f(2+x) = f(2-x)$ para todo x real. Se a equação $f(x) = 0$ tem exatamente quatro raízes reais distintas, A soma dessas raízes é igual a:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 8✓
(e) 7

20. (Anulada - ERRO DIGITAÇÃO NO TEXTO!) Se um macaco sobe uma escada de três em três degraus, sobram dois degraus; se ele sobe de quatro em quatro degraus, sobram dois degraus; se ele sobe de cinco em cinco degraus, sobram três degraus e se ele sobe de sete em sete degraus, sobram quatro degraus. Sabendo que o número de degraus é múltiplo de sete e está compreendido entre 140 e 200, a soma dos algarismos do número de degraus da escada é igual a:

(a) 10

(b) 12
(c) 14
(d) 16
(e) 18